CORRESPONDANCE
SUR
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Publiée par M. Hachette.

IIIe. Volume.

N°. III. *Janvier* 1816.

§. I.

HISTOIRE DE L'ALGÈBRE.

SUR L'ALGÈBRE DES INDIENS.

Traduit de l'Anglais (*), *par* M. Terquem, *professeur aux Écoles Royales d'Artillerie.*

Nous avons obtenu récemment des détails sur l'état de l'Algèbre parmi les habitans des Grandes-Indes; et il est probable que les recherches des savans Anglais nous procureront bientôt des renseignemens encore plus circonstanciés.

On avait depuis long-tems quelques raisons de soupçonner que les principes de l'Algèbre, ainsi que ceux de l'Arithmétique et de la Numération, nous étaient venus par les Maures et les Arabes, qui les avaient puisés eux-mêmes chez les Indiens. En effet il y a déjà plus d'un siècle qu'on sait en Europe, que les Indiens possèdent des ouvrages très-savans sur l'Astronomie. Des renseignemens dus à des savans Français, ont été publiés dans les

(*) Cette partie de l'Histoire de l'Algèbre est extraite d'un ouvrage de M. Hutton, intitulé Trats on Mathematical, etc., 3 vol. in-8., Londres, 1812. Les caractères ou mots indiens et arabes qui entrent dans cette traduction, seront gravés avec un renvoi aux pages, sur la première planche jointe à ce cahier.

Charles Hutton, Tracts on Mathematical and Philosophical Subjects.

Mémoires de l'Académie, et mis en usage d'une manière aussi ingénieuse que savante, par l'infortuné Bailly, dans son ouvrage sur l'Astronomie indienne. Depuis cette époque, des communications importantes ont été faites par plusieurs de nos savans concitoyens, membres de la Société de Calcuta, et par d'autres amateurs de la science, tels que, MM. Williams Jones, Samuël Davis, Edouard Strachey et beaucoup d'autres; et l'on a maintenant acquis la certitude que les Indiens ont dû être en possession, quelques milliers d'années avant l'ère chrétienne (trois à quatre mille ans au moins), de plusieurs observations astronomiques très-exactes, et des règles de calcul; règles qui supposent une grande connaissance de la Géométrie, de deux Trigonométries, et l'usage de Tables bien faites des sinus et des sinus verses; le tout à une époque où l'Europe était plongée dans une profonde barbarie, si toutefois elle était habitée. (*Voyez* sur cette matière un Mémoire très-important de Samuël Davis, dans le second volume des Recherches Asiatiques, et deux savantes dissertations sur la Trigonométrie et l'Astronomie indiennes par le professeur Playfair, dans les deuxième et quatrième volumes des Transactions philosophiques d'Edimbourg.)

Nous ne nous occuperons ici principalement que de l'état de l'Algèbre dans cette contrée orientale. On a pensé depuis longtems qu'un peuple qui avait acquis tant de connaissances dans les diverses branches de Mathématiques, ne pouvait pas être resté étranger à l'art algébrique; aussi sommes-nous maintenant parvenus à nous procurer des preuves certaines de son esprit de pénétration dans cette partie de la science. On a trouvé des ouvrages sur l'Algèbre, composés dans la langue du pays, ou traduits de cette langue en persan. Quelques-unes de ces traductions persanes sont en ce moment entre les mains de M. Davis, Baronnet de Hil-Street et l'un des directeurs de la Compagnie des Indes Orientales. Les traductions persanes sont en partie accompagnées d'une traduction anglaise.

M. Edouard Strachey, déjà cité, a fait passer en Angleterre quelques autres traductions d'ouvrages de même genre; comme j'ai eu l'avantage de m'en servir, je vais tâcher d'en donner ici une idée.

Le premier ouvrage communiqué par M. Strachey, est un Mémoire imprimé sur l'originalité, l'étendue et l'importance des connaissances mathématiques des Indiens, avec quelques extraits de la traduction persane de deux ouvrages indiens nommés, l'un le Leelawuttée, et l'autre le Beej Gunnit ou bien Beja Ganita, selon l'orthographe de M. Davis. M. Strachey nous apprend que ces deux ouvrages ont été composés tous les deux par Bhasker Acharij,

célèbre mathématicien et astronome indou, qui vivait vers le commencement du 13^{e} siècle de l'ère chrétienne. Le dernier de ces deux traités, relatif à l'Algèbre et à ses applications, a été traduit en langue persane par Utta Ulla Rusheedee, en 1634, probablement à Agra ou à Dehli. Le Leelawuttée a été traduit dans la même langue, en 1587, par le célèbre Fyzee.

Notice de M. STRACHEY.

C'est un fait bien constaté, dit M. Strachey, que les Perses ont appris leurs sciences des Arabes, et que ceux-ci doivent beaucoup de leurs connaissances mathématiques aux Grecs; mais il n'en est pas moins certain que l'arithmétique des Arabes leur est venue des Indiens, et il devient très-probable que leur algèbre est venue de la même source; le tems de l'introduction de cette science parmi les Arabes, et les autres circonstances qui accompagnèrent cette introduction, sont entièrement inconnus.

Quoi qu'il en soit, il paraît que l'Astronomie cultivée sous le règne de al Mamoon, est la plus ancienne des sciences mathématiques indiennes introduites chez les Arabes. Dans des tems plus récens, plusieurs Mahométans se sont occupés de livres indous; on en trouve une Notice dans l'Ayeen Ackbery, et dans l'ouvrage d'Herbelot. Abul Fuzl contient une liste d'ouvrages sanscrits, traduits en langue persane du tems d'Akbar, parmi lesquels le Leelawuttée est le seul qui traite des Mathématiques.

Si l'on compare l'Algèbre des Grecs, des Arabes et des Européens d'aujourd'hui, avec les traductions persanes du Leelawuttée et du Beej Gunnit, il en résulte, avec beaucoup de probabilité, que l'Algèbre des Arabes diffère entièrement de l'Algèbre de Diophante, que l'un n'est pas déduit de l'autre; que les Arabes n'ont pas poussé bien loin au-delà de ce qu'ils ont pris des Indiens; que le Leelawuttée et le Beej Gunnit renferment les principes nécessaires pour résoudre toutes les questions de l'Algèbre de Diophante et de l'Algèbre des Arabes; que dans ces traductions se trouvent des questions résolues d'après des principes auxquels l'Algèbre de Diophante et l'Algèbre des Arabes ne sauraient suppléer; enfin, que les Indiens étaient plus avancés dans toutes les parties de cette science, que ne le furent les Européens avec tous les progrès qu'ils avaient fait faire à cette science jusque vers le milieu du 18^{e} siècle.

Sur les séries; extraits du Leelawuttée.

La traduction du Leelawuttée renferme un chapitre sur les combinaisons, et un autre sur les progressions. Nous allons en rapporter quelques exemples.

Combinaisons.

« Trouver le nombre de mélanges dont différentes choses sont
» susceptibles ?

» Ecrivez sur une même ligne la suite des nombres naturels,
» en commençant par le nombre de choses, et en finissant par
» l'unité. Au-dessous écrivez la même suite dans un ordre inverse,
» de manière que le nombre 1 soit au commencement ; divisez le
» premier terme de la première suite par le nombre correspon-
» dant inférieur. Le quotient est le nombre de combinaisons des
» choses prises une à une. Multipliez ce quotient par le deuxième
» terme de la ligne supérieure, et divisez le produit par le deuxième
» terme correspondant inférieur. Le quotient est le nombre des
» combinaisons des choses prises deux à deux ; on multiplie de-
» rechef ce quotient par le troisième terme de la ligne supérieure,
» et on divise le produit par le terme correspondant de la ligne
» inférieure, et ainsi de suite ; si l'on fait ensuite la somme de
» tous les quotiens qu'on a obtenus, on aura le nombre total de
» combinaisons dont ces choses sont susceptibles. »

« *Exemple.* Les six saveurs appelées en indien *Khut rus*,
» sont, 1° le sucré, 2° le salé, 3° l'aigre, 4° le doux, 5° l'amer,
» 6° l'âcre. Je veux connaître le nombre de mélanges qu'on peut
» produire en combinant ces saveurs entr'elles de toutes les ma-
» nières possibles. Ecrivez ainsi :

$$\left\{\begin{matrix}654321\\123456\end{matrix}\right\};\ \text{ensuite}\ \frac{6}{1}=6,\quad \frac{6\times5}{2}=15,$$

$$\frac{15\times4}{3}=20,\quad \frac{20\times3}{4}=15,\quad \frac{15\times2}{5}=6,\quad \frac{6\times1}{6}=1,$$

» la somme de tous les quotiens est 63 ; ainsi le nombre total des
» combinaisons cherchées est 63. »

Toutes les règles de l'algèbre sont exprimées dans cet ouvrage de la même manière, en phrases très-longues, qui dans des cas compliqués, induisent aisément en erreur, et rendent ces règles difficiles à suivre ; tandis qu'on comprend ces règles, pour ainsi dire, à la seule inspection, en se servant des notations en usage parmi nous.

PROGRESSIONS.

Des Progressions croissantes.

« Elles sont de plusieurs espèces : 1°. la progression par 1, c'est-
» à-dire une progression dont chaque terme surpasse d'une unité

» le précédent. Pour trouver la somme de cette progression il faut » ajouter 1 au dernier terme, et multiplier ensuite par la moitié » de ce terme. Pour trouver ensuite la somme des termes pro- » venant de l'addition continuelle des termes de la première pro- » gression, ajoutez deux au nombre de termes, multipliez par » le dernier terme, et divisez par trois ; le quotient sera la somme » des termes de la seconde suite. »

Ces règles se réduisent, comme on voit, à trouver la somme des nombres naturels et la somme des nombres triangulaires.

On trouve ensuite dans la traduction persane, une règle pour la sommation des carrés et des cubes des nombres naturels. La somme des n premiers termes de la première série est égale à $\frac{2n+1}{3}.S$ et la somme des n termes de la deuxième série est S^2, S étant la somme des n premiers termes de la progression naturelle.

Nous avons exprimé ces règles par la notation usuelle, et nous ferons de même à l'égard des règles pour les progressions arithmétiques en général, qu'on trouve dans le même ouvrage, à la suite de celles que nous venons de donner. Ces règles sont renfermées dans ces équations

$$(n-1)d+a=z;\quad \frac{z+a}{2}=m;\quad mn=S;$$

$$\frac{S}{n}-(n-1)\frac{d}{2}=a;\quad \frac{\left(\frac{S}{n}-a\right)}{\frac{1}{2}(n-1)}=d,$$

$$\frac{\sqrt{[2dS+(a-\frac{1}{2})^2]}-(a-\frac{1}{2}d)}{d}=n;$$

a étant le premier terme, m le terme moyen, z le dernier terme, d la différence, S la somme.

L'auteur indou a déduit la dernière de ces formules de la précédente, en résolvant une équation du deuxième degré assez compliquée, et dont la résolution suppose une grande habitude dans ces sortes d'opérations.

Après ces règles sur la progression arithmétique, vient immédiatement une règle pour trouver la somme d'une progression géométrique (*). Elle ne diffère pas de la nôtre, et nous fait voir que les Indiens avaient des signes particuliers pour la multiplication et l'élévation des puissances.

(*) Nous la supprimons parce que son énoncé est très-obscur dans la traduction anglaise. (*Note du Traducteur français.*)

264

Il n'est pas bien sûr qu'on ait connu en Europe, avant le seizième siècle, quelques-unes des règles contenues dans ces deux chapitres du Leelawuttée. Pelletarius, dans son Algèbre imprimée en 1558, donne une Table des carrés et des cubes des nombres naturels, et entr'autres propriétés de ces nombres, il fait remarquer que la somme des nombres cubiques, en partant de l'unité, est toujours un carré dont la racine est égale à la somme des racines de ce nombre. Cette propriété s'accorde avec la règle du Leelawuttée rapportée ci-dessus. Il ne paraît pas que les connaissances des Indiens sur les nombres figurés s'étendissent au-delà de ce que nous venons d'en citer.

Sur la Mesure du Cercle et de la Sphère; extrait du Leelawuttée.

Le Leelawuttée donne les règles suivantes pour trouver la mesure du cercle, et celle de la sphère.

Pour trouver la longueur d'une circonférence de cercle, multipliez son diamètre par 3927 et divisez le produit par 1250, ou bien, multipliez le diamètre par 22 et divisez le produit par 7. Nous voyons ici deux approximations; celle de 22 à 7 est la même que celle d'Archimède; l'autre approximation revient à celle de 1 à 3,1416, rapport du diamètre à la circonférence, plus exact que celui des Européens avant les travaux de Viete. Parmi d'autres règles de géométrie, nous rapporterons les suivantes exprimées à notre manière, dans lesquelles D désigne le diamètre, et C la circonférence

$$\tfrac{1}{4}\, C\, D = \text{aire du cercle},$$
$$C\, D = \text{surface de la sphère},$$
$$\tfrac{1}{6}\, D^2\, C = \text{solidité de la sphère},$$
$$\tfrac{3927}{5000}\, D^2 = \text{aire du cercle},$$
$$\frac{D}{2} + \frac{D^3}{\frac{2}{20}} = \text{la solidité de la sphère}.$$

Cette dernière formule est vicieuse, apparemment par une faute d'impression. Nous l'avons rétablie par celle-ci qui doit être la véritable,

$$\frac{D}{2} \times \frac{D^2}{\frac{20}{21}} = \tfrac{21}{40}\, D^3 = 0{,}525\, D^3.$$

Cette dernière évaluation diffère très-peu de la nôtre qui est 0,523623.

D désignant le diamètre, C la corde, V le sinus verse de l'arc a,

on a l'équation $\frac{1}{2} D - \frac{1}{2}\sqrt{(D^2 - C^2)} = V$. Ce théorème est d'une exactitude géométrique; l'auteur en déduit celui-ci $2\sqrt{(DV - V^2)} = C$. Mais les deux théorèmes qu'il donne ensuite ne sont que des approximations ; ils sont renfermés dans ces deux équations

$$\frac{4aD(c-a)}{\frac{5}{4}c^2 - a(c-a)} = C, \text{ où } c \text{ désigne la circonférence.}$$

La corde C est trop grande presque d'$\frac{1}{58}$ partie de sa longueur pour un arc de deux degrés, l'expression étant exacte jusqu'à la quatrième figure décimale inclusivement; et elle donne la corde trop grande de la soixante-sixième partie de sa longueur pour un arc de 30 degrés, l'expression n'étant exacte que jusqu'à la troisième figure décimale ; mais on ne voit pas comment ils sont parvenus à cette formule (*). La seconde équation est

$$\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}c^2 C}{4D + C}\right)} = a.$$

(*) *Note de M. Servois, professeur aux Écoles Royales Militaires d'Artillerie.*

On a pour le rayon 1 et la circonférence 2π,

$$\sin a = a\left\{1 - \frac{a^2}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

a étant un arc de la circonférence 2π. Le sinus du même arc a en parties du rayon de la circonférence c, sera

$$\sin a = \frac{2\pi a}{c}\left\{1 - \frac{4\pi^2}{6}\frac{a^2}{c^2} + \text{etc.}\right\}$$

En s'en tenant aux deux premiers termes du développement, on a une formule approximative d'autant plus exacte, que l'arc a sera plus petit, en faisant $\frac{a}{c} = x$, $\pi = 3,14$,

$$\sin a = 6,28x\,(1 - 6,57x^2),$$

ou bien

$$\sin a = 6,28x\left\{1 - x\sqrt{6,57}\right\}\left\{1 + x\sqrt{6,57}\right\}$$

$$\sin a = 6,28x\left\{1 - 2,56x\right\}\left\{1 + 2,56x\right\},$$

ou bien encore parce que $1 + 2,56x = \frac{1}{1 - 2,56x + (2,56x)^2}$

$$\sin a = 6,28x\left\{\frac{1 - 2,56x}{1 - 2,56x(1 - 2,56x)}\right\}$$

Dans cette formule on peut altérer un tant soit peu le coefficient numérique, pourvu qu'on en laisse un à déterminer, par la condition que la formule soit exacte dans un cas particulier, pris parmi ceux où la formule commence à s'écarter sensiblement de la vérité : ainsi écrivons

$$\sin a = 6,4x\left\{\frac{1 - 2x}{1 - Ax(1 - 2x)}\right\}\ldots(1),$$

et supposant que la formule est vraie pour l'arc $a = 30°$ (1ere division), alors

Elle est tirée de la première, en résolvant l'équation du second degré.

Nous allons extraire du même ouvrage les expressions des longueurs des côtés des figures régulières inscrites dans les circonférences.

			Corrections.
triangle.	$\frac{130123}{120000}D.$	triangle.	$\frac{103923}{120000}D.$
carré.	$\frac{84853}{120000}D.$		
pentagone.	$\frac{70534}{120000}D.$		
hexagone	$\frac{60000}{120000}D.$		
heptagone.	$\frac{52055}{120000}D.$	heptagone.	$\frac{52070}{120000}D.$
octogone.	$\frac{45922}{120000}D.$		
nonagone.	$\frac{41031}{120000}D.$	nonagone.	$\frac{41042}{120000}D.$

Trois de ces nombres sont fautifs apparemment par une faute du copiste, on a corrigé ces nombres dans la colonne adjacente.

$x = \frac{1}{12}$: ainsi on a pour déterminer A, l'équation

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{6,4}{12}\left(1 - \frac{1}{6}\right)}{1 - \frac{A}{12}\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{5}{72}A},$$

d'où

$$A = \frac{8}{5}.$$

Ainsi l'équation (1) devient

$$\sin a = \frac{6,4x(1-2x)}{1 - \frac{8}{5}x(1-2x)} = \frac{8x(1-2x)}{\frac{5}{4} - x(1-2x)},$$

ou bien

$$\sin a = \frac{8a(c-2a)}{\frac{8}{4}c^2 - 2a(c-2a)},$$

mais $\sin a = \frac{1}{2}$ cord. $2a$; donc

$$\text{cord. } 2a = \frac{8 \cdot 2a(c-2a)}{\frac{5}{4}c^2 - 2a(c-2a)},$$

ou bien, en changeant $2a$ en a

$$\text{cord. } a = \frac{8a(c-a)}{\frac{5}{4}c^2 - a(c-a)},$$

c'est-à-dire dans l'hypothèse du diamètre $= 2$; lorsque le diamètre sera D, et la circonférence c, on aura

$$\text{cord. } a = \frac{4aD(c-a)}{\frac{5}{4}c^2 - a(c-a)};$$

c'est la formule de l'indou.

Fin de la Note de M. Servois.

Sur les Équations radicales du second degré; extrait du Leelawuttée et Beij Gunnit.

La résolution des équations radicales du second degré est présentée ainsi dans la traduction du Leelawuttée.

« Lorsque le produit de la racine du nombre pensé, multiplié
» par un nombre connu, est donné, et que la somme de ce pro-
» duit, ajoutée au nombre pensé, ou que la différence de ce pro-
» duit, retranchée du nombre pensé, est aussi donnée, il faut,
» pour trouver ce nombre pensé, suivre cette règle : prenez la
» moitié du multiplicateur de la racine, et élevez cette moitié au
» carré; ajoutez à ce carré le second nombre donné; extrayez la
» racine carrée de cette somme; ajoutez ou retranchez la moitié du
» multiplicateur de la racine, selon qu'il s'agit dans la question,
» d'une soustraction ou d'une addition. Elevez le résultat au
» carré, et ce carré est le nombre pensé. »

Cette règle s'accorde parfaitement avec nos procédés. En effet, en mettant la question en équation, il vient,

$$x \pm a\sqrt{x} = b\text{; d'où l'on tire,}$$
$$x = \left(\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b} \pm \tfrac{1}{2}a\right)^2;$$

Lorsque le multiplicateur du nombre pensé est fractionnaire, on donne dans l'ouvrage la règle suivante pour débarrasser le nombre pensé de son multiplicateur.

« Lorsque le nombre pensé est augmenté ou diminué de ce
» même nombre pensé, multiplié par une fraction, il faut pro-
» céder ainsi. Augmentez ou diminuez la fraction de l'unité, di-
» visez le multiplicateur du nombre pensé et le second nombre
» donné respectivement par cette somme ou cette différence, et
» traitez le quotient comme il a été enseigné ci-dessus. »

En effet, faisant usage de notre notation, on obtient l'équation $x \pm \frac{1}{m}x \pm a\sqrt{x} = b$, divisant les deux nombres par $1 + \frac{1}{m}$, il vient $x \pm \dfrac{a}{1+\frac{1}{m}} = \dfrac{b}{1+\frac{1}{m}}$; d'où l'on tire comme ci-dessus, en remplaçant a et b par les quotiens $\dfrac{a}{1+\frac{1}{m}}$, $\dfrac{b}{1+\frac{1}{m}}$.

la valeur de l'inconnue.

$$x = \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{m}} \right)^2 + \frac{b}{1+\frac{1}{m}} \right]} \mp \frac{\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{m}} \right\}^2$$

La traduction du Beij Gunnit renferme les mêmes objets, mais ils sont traités d'une manière plus obscure. Voici un exemple de résolution de l'équation du second degré, $ax^2 + bx = C$.

« Multipliez tous les termes par $4a$, il vient

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac;$$

» ajoutez le carré de b aux deux nombres, on obtient ceci

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac,$$

» d'où l'on tire

$$» \; x = \frac{\sqrt{(b^2 + 4ac)} - b}{2a}. \; »$$

Ce procédé par lequel on évite les fractions, est plus aisé que le nôtre en pareil cas.

L'auteur s'exprime sur les deux valeurs qu'on obtient dans une équation du second degré, en ces termes;

« Lorsque la chose se trouve d'un côté, les nombres étant
» négatifs, et que les nombres de l'autre côté sont moindres que
» les nombres négatifs du premier côté, il y a deux méthodes à
» suivre : la première consiste à égaler ces nombres entr'eux sans
» les changer; la seconde consiste à rendre négatifs les nombres
» du second côté, s'ils sont positifs, et à les rendre positifs s'ils
» sont négatifs; formez ensuite l'équation, on obtiendra deux
» valeurs, dont l'une satisfera probablement à la question. »

Malgré l'obscurité de cet énoncé, on voit qu'il doit se rapporter à deux racines positives d'une certaine équation radicale du second degré. Les exemples que nous venons d'extraire du Leelawuttée et du Beij Gunnit, nous apprennent que la résolution des équations du second degré était aussi avancée parmi les Indiens que parmi les Arabes, et même chez les Européens, avant le siècle de Cardan. Lucas de Borgo, dont l'ouvrage fut imprimé vers la fin du 15e siècle, fait usage des deux valeurs de l'inconnue, dans le cas seulement où ses valeurs sont toutes les deux positives, mais il n'a aucun égard aux racines négatives.

Voici encore un autre exemple d'une équation radicale du second degré, résolue dans le Beija Gunnita.

« Un essaim d'abeilles placé sur un arbre, la racine carrée

» de la moitié du nombre d'abeilles s'envole, et ensuite les $\frac{8}{9}$ » du nombre d'abeilles ; il en reste deux : on demande combien il y avait d'abeilles ? »

Cette question qui, traitée à la manière ordinaire, en prenant x pour le nombre inconnu d'abeilles, mène à une équation assez compliquée, est résolue avec beaucoup d'adresse dans l'ouvrage indien.

En effet, en prenant x pour l'inconnue cherchée, on est conduit à l'équation,

$$x - \tfrac{8}{9}x - \sqrt{\tfrac{1}{2}x} = 2, \text{ ou bien } \tfrac{1}{9}x - \sqrt{\tfrac{1}{2}x} = 2.$$

L'auteur prend pour inconnue la quantité $2x^2$, qu'il suppose égale au nombre cherché d'abeilles, et obtient ainsi l'équation très-simple,

$$2x^2 - \tfrac{16}{9}x^2 - x = 2, \text{ ou bien, } \tfrac{2}{9}x^2 - x = 2,$$

équation dont la solution est plus aisée.

Des Problèmes indéterminés du second degré; extrait de Diophante et du Beej Gunnit, ou mieux, du Bija Ganita.

La seizième question du sixième Livre de Diophante est énoncée en ces termes :

« Etant donné deux nombres et un nombre carré tel, qu'en » retranchant le premier de ces nombres du produit du nombre » carré, multiplié par le second nombre, le reste est encore un » carré. On demande à trouver un carré plus grand que le premier qui remplisse les mêmes conditions. Soit, par exemple, » 3 et 11 les deux nombres donnés, et 25 le carré donné ; en » multipliant 3 par 25, on a 75 pour produit ; si l'on en ôte 11, » qui est le second nombre, le reste 64 est le carré parfait ; il » s'agit de trouver un carré plus grand que 25, qui jouisse de la » même propriété à l'égard des nombres 3 et 11 ; supposons que » $N + 5$ est la racine du carré cherché, le carré de cette quantité est $N^2 + 10N + 25$; le triple de ce carré, diminué de 11, » laisse pour reste la quantité $3N^2 + 30N + 64$, qui, d'après la » question, doit être un carré parfait ; supposons la racine égale » à $N - 8$; on tire de cette supposition, (en formant l'équation) » $N = 62$, et $N + 5 = 62 + 5 = 67$; $67^2 = 4489$; ainsi 4489 » est le carré demandé. »

Dans le Bija Ganita, ce même problème est aussi résolu, mais par une méthode plus générale et plus scientifique, et à

l'aide d'un autre problème qui est resté inconnu en Europe jusque vers le milieu du 17[e] siècle, et n'a été appliqué aux questions de ce genre, que vers le milieu du 18[e] siècle, par Euler. Lorsque l'équation indéterminée a cette forme, $ax^2 + b = y^2$, le Bija Ganita indique ce moyen pour trouver de nouvelles valeurs. Soit $ag^2 + 6 = h^2$ un cas particulier; cherchez deux nombres m et n qui satisfassent à l'équation $an^2 + 1 = m^2$; et posant $\left\{\begin{array}{l} x = mg + nh \\ y = mh + ng \end{array}\right\}$, les nombres x et y satisfont à l'équation proposée.

On trouve dans le quatrième et le cinquième chapitre du Bija Ganita, des méthodes générales pour la résolution des équations indéterminées des deux premiers degrés, et qui diffèrent entièrement des méthodes dont Diophante s'est servi. Selon l'opinion de M. Strachey, qui paraît extrêmement probable, l'ouvrage indou abonde en théorèmes et en artifices très-ingénieux, qu'on chercherait vainement chez les Grecs. Tels sont, par exemple, l'emploi d'un nombre indéfini de quantités inconnues et de signes propres à les présenter, une bonne arithmétique des irrationnels, une théorie complète des équations indéterminées du premier degré, et une connaissance assez étendue des équations indéterminées du second degré. La disposition et la méthode des deux ouvrages indou et grec, diffère autant que leurs contenus. Le Bija Ganita forme un corps régulier de doctrine. Il n'en est pas ainsi de l'ouvrage de l'analyste grec. Le premier présente un ensemble dont les parties sont bien liées et bien développées, abondant en règles dont le caractère de généralité dénote une science profonde; ces règles sont éclaircies par des exemples, et les solutions sont préparées avec art. Le dernier, quoique non entièrement dépourvu de méthode, donne peu de règles générales, et se distingue principalement par l'art et l'habileté de l'auteur, dans le choix des suppositions qu'il fait pour parvenir aux solutions de ses questions particulières. L'ordre systématique de l'ouvrage indou fait apprendre l'algèbre comme une science; tandis que l'ouvrage grec augmente la pénétration de l'esprit, par le grand nombre de solutions ingénieuses, de problèmes très-difficiles qu'il contient. Le Bija Ganita est la production d'un compilateur savant et laborieux; Diophante s'annonce comme un homme de génie qui écrit sur une science encore dans l'enfance.

A ces renseignemens, extraits principalement, comme il a été dit, de la notice imprimée de M. Strachey, je vais joindre d'autres particularités curieuses concernant les deux ouvrages indous, et que j'ai apprises récemment de M. Davis, baronnet. De plus, feu M. Reubou Burrow a recueilli dans les Indes

beaucoup de manuscrits sanscrits et persans, qui traitent des Mathématiques. Les ouvrages persans sont des traductions d'originaux sanscrits. Ce savant orientaliste a légué plusieurs de ses manuscrits à un fils qui est en Angleterre, avec la condition de ne les lui remettre que lorsqu'il aura acquis la connaissance des langues et des sciences. Il a aussi légué un ou deux manuscrits à son ami M. Dalby, professeur de Mathématiques à l'École royale militaire de Wycombe; les traductions persanes du Bija Ganita et du Lilawati, avec l'essai d'une traduction anglaise de ces ouvrages, sont déjà entre les mains de ce professeur. Cette traduction, ébauchée par M. Burrow, écrite au crayon interlinéairement, court risque d'être effacée; heureusement M. Dalby vient de recevoir de M. Strachey, maintenant aux Indes, une traduction anglaise complète du Bija, que j'ai eue pendant quelques tems à ma disposition. A cette complaisance M. Dalby a ajouté celle de m'envoyer des remarques descriptives sur les manuscrits originaux persans. Ce sont là les sources où j'ai puisé les renseignemens que je vais transcrire.

Le premier ouvrage porte pour titre ce mot : le Beej, ou le Beej Gunnit (c'est la prononciation des Indiens; mais ils écrivent Bija Ganita), et paraît avoir été traduit en persan vers l'année 1634; M. Burrow désigne l'Algèbre par le seul mot le Beij; mais dans l'Introduction persane on trouve ces deux passages :

« Le Beij Gunnit. L'auteur est Bhasker Acharya, auteur du » Leelawutée. » « Cette excellente méthode de calcul est traduite » en persan de l'indou, et se nomme le *Livre de la Composition* » *et de la Résolution*. » Les deux mots indiens traduits ici par ces mots composition et résolution, sont dans d'autres endroits rendus par le seul mot « Algèbre ». Les deux mots persans qui répondent à Bija Ganita en diffèrent matériellement; ensorte que les auteurs persans et arabes paraissent s'être attachés au sens plutôt qu'à la prononciation du sanscrit. Un commentaire du traducteur persan, sur l'original sanscrit, remplit une partie du manuscrit. Dans un endroit il fait mention d'un Dictionnaire d'algèbre, sans citer ni l'auteur, ni la date.

L'ouvrage, divisé en cinq parties ou livres, commence par l'explication des quantités positives et négatives, qu'il caractérise par des termes désignant l'existence et la non-existence, ce qui est analogue aux idées de propriété et de dette dont nous nous servons quelquefois pour expliquer la nature de ces quantités. Les quatre premières opérations viennent ensuite, comme chez nous. De là on passe au calcul des irrationnels, qui est traité avec beaucoup d'étendue; on croit même y apercevoir une méthode générale pour développer les puissances d'un polynome irration-

nel, et qui paraît avoir quelqu'analogie avec nos règles combinatoires. Ensuite viennent des problèmes d'analyse indéterminés, qui se suivent dans cet ordre :

Problèmes sur les carrés. Par exemple (en se servant de notre notation). Trouver des carrés parfaits de la forme $67x^2+1$, $61x^2+1$, $13x^2+1$, ou en genéral de la forme ax^2+b.

Problèmes qui mènent à des équations du premier degré, application aux propriétés des triangles.

Problèmes sur les carrés. Par exemple. Faire que $x \pm y$ et xy soient tous les deux des carrés parfaits; faire que x^3+y^3 et x^2+y^2 soient des carrés parfaits ensemble.

Quelques problèmes qui mènent à des équations du second degré.

On dit aussi quelque chose de l'équation du troisième degré; mais l'auteur paraît avoir senti l'impossibilité de résoudre cette équation généralement. On y trouve l'énoncé très-concis d'une règle qui permet de soupçonner seulement l'existence d'une solution mécanique; car il y a ici une lacune dans la traduction.

Plusieurs problèmes sur les carrés. Exemple. Trouver des nombres entiers qui rendent carrés parfaits les expressions suivantes :

$$\left.\begin{matrix} x+y \\ x^2+y^2 \end{matrix}\right\} \text{ensemble}; \quad \left.\begin{matrix} 7x^2+8y^2 \\ 7x^2-8y^2+1 \end{matrix}\right\} \text{ensemble}; \quad \left.\begin{matrix} x^2+y^2 \\ x+y \end{matrix}\right\} \text{ensemble};$$

$$\left.\begin{matrix} x-y+2 \\ x+y+2 \end{matrix}\right\} \text{ensemble}; \quad \left.\begin{matrix} x^2-y^2+1 \\ x^2+y^2+1 \end{matrix}\right\} \text{ensemble};$$

$$\left.\begin{matrix} x-y = \text{un carré} \\ x^2+y^2 = \text{cube} \end{matrix}\right\} \text{ensemble}; \quad \text{etc.}$$

Finalement, toutes sortes de questions indéterminées, dans le genre des questions de Diophante, sans être les mêmes que celles de cet auteur. Cette circonstance seule prouverait une différence d'origine qui est déjà constatée par la différence dans les moyens de solution. Ces questions sont quelquefois assez difficiles; M. Burrow a écrit en marge les solutions de quelques-unes, d'après les procédés en usage parmi nous.

On trouve dans le même ouvrage trois à quatre problèmes indéterminés qui se rapportent au triangle rectangle. Là on s'attend naturellement à voir citer la 47e proposition du premier livre d'Euclide. Mais au lieu de cette proposition on cite la figure de la chaise nuptiale. De cette circonstance, et de quelques autres ouvrages des Indiens, nous pouvons conclure qu'ils connaissaient ce théorème et plusieurs autres de notre géométrie, et il est très-probable que c'est chez eux que Pythagore a puisé

toutes ses connaissances, qu'il a apportées ensuite à ses compatriotes, après son retour en Grèce.

Les opérations avec le zéro se font comme parmi nous. Burrow traduisit d'abord le quotient $\frac{a}{0}$ par le mot *infini;* il a ensuite effacé ce mot et l'a remplacé par ceux-ci : *n'est pas compréhensible.* Apparemment qu'il entendait par là *être inassignable.*

Quant à la notation employée dans le manuscrit, il paraît que les quantités inconnues sont représentées par des lettres ou des caractères qui portent en partie le nom des couleurs. Quand il n'y a qu'une seule inconnue, elle est désignée par un caractère particulier nommé *majool.* Lorsqu'il y a deux inconnues, la seconde prend le nom de *aswad*, qui veut dire *noire.* Dans le cas d'une troisième inconnue, elle porte le nom de *neelok* (*bleue*); la quatrième est dite *jaune*, etc.

Le Majool a pour marque (*voyez* la planche première.)

Aswaad.............

Neelok..............

Les autres marques sont plus simples.

Le signe positif est , et le signe négatif est .

Le signe pour la quantité inconnue ou cherchée d'une équation est ; toutes ces marques sont des mots arabes qui indiquent certaines opérations à faire. Le nom technique de la quantité inconnue est *chose*, voulant par là désigner expressément la chose qui donne lieu à la question ou à la recherche. Il est à remarquer que les premiers auteurs italiens qui ont écrit sur l'Algèbre, ont pris le mot *cosa* pour désigner l'inconnue. De là cette science et les nombres cherchés furent long-tems connus en Europe sous les noms d'*art cossique* et de *nombres cossiques.*

Le caractère suivant , placé à côté de l'inconnue, signifie qu'il faut élever l'inconnue au carré; celui-ci , qu'il faut élever l'inconnue au cube. Il y a aussi une marque qui indique l'extraction de la racine carrée, et une autre pour l'extraction de la racine cubique. Les puissances supérieures sont formées et dénommées en répétant et combinant ces signes entr'eux. Ainsi la quatrième puissance est nommée *carré-carré;* la cinquième, *carré-cube;* la sixième, *cube-cube*, et ainsi de suite, en combinant les puissances par voie de multiplication.

Il ne paraît pas qu'il y ait de signe analogue à celui dont nous nous servons pour unir les quantités composées entr'elles.

Chaque formation d'équation est précédée de ces mots *j'égale* ou *égalant*, et toutes les opérations en général sont décrites en

phrases très-longues. Toutefois M. Davis m'apprend que dans les originaux sanscrits, les Indiens, au lieu de se servir de la notation verbale que nous avons rapportée ci-dessus, abrègent les mots et n'en prennent que les lettres initiales, usage pratiqué long-tems en Europe.

Les Indiens emploient ces lettres initiales, comme nous les lettres *a*, *b*, *c* pour représenter des nombres. Ce signe || marque l'addition. Ainsi $a \,||\, b \,||\, x$ équivaut à $a+b+x$. Un point placé sur la lettre indique que la quantité est négative ou soustractive. Pour désigner la multiplication, on écrit les facteurs à côté les uns des autres, sans interposition de signe, comme chez nous; ainsi $ab\dot{x}$ veut dire $a \times b \times -x$; ils écrivent à côté de la quantité la lettre initiale du mot qui désigne l'exposant de la puissance ou de la racine qui doit affecter la quantité. Par exemple, *c* étant la lettre initiale du mot carré, ils écrivent *ac* pour dire qu'il faut élever au carré la quantité *a*; de même *ar* équivaut à $\sqrt{a}$, *r* étant l'initiale du mot racine.

Ce signe est placé à la droite de la quantité, au lieu que nous le plaçons à gauche.

M. Davis m'informe, de plus, que les caractères sanscrits dont les Indiens se servent pour désigner les inconnues ont cette forme . M. Charles Wilkins, libraire de la Compagnie des Indes Orientales, a eu la bonté de me fournir les caractères d'imprimerie et de m'en donner l'explication. Le premier caractère se prononce *pa;* c'est la syllabe initiale du mot *pandu*, qui veut dire blanc.

Le second se prononce *kā*, initiale de *kala*, noire.
Le troisième......... *nī*, initiale de *nila*, bleu.
Le quatrième......... *pī*, initiale de *pila*, jaune.
Le cinquième......... *lō*, initiale de *lōhită*, rouge.

Voici maintenant, selon M. Wilkins, les étymologies des noms sanscrits des deux ouvrages. *Lilawati* est un adjectif du genre féminin, dérivé du mot *lila*, qui signifie également jeu, amusement, plaisirs, recherches, efforts; ensorte que le titre peut également se traduire par *Livre de Recréations*, ou *Livre de Recherches.*—*Bija*, proprement dit *Vija*, signifie une semence, ou l'origine de quelque chose. *Ganita* est le participe passé du verbe *gān*, qui veut dire compter, calculer, etc.; ainsi *bija gannita* est une épithète composée qui, traduite littéralement, signifie la semence calculée, la source ou la racine calculée.

Il est bon d'observer que les titres des ouvrages sanscrits indiquent rarement leurs contenus. Il faut encore observer que dans ces der-

niers ouvrages, les signes positifs et négatifs et les coefficiens sont toujours placés à la droite de la quantité qu'ils affectent; ainsi pour exprimer le produit $+2xy$, on y trouve $2xy+$, ou bien $xy2+$. Cette dernière manière est surtout d'usage dans les traductions persanes, parce que l'écriture persane se lit de droite à gauche, tandis que le sanscrit se lit de gauche à droite, comme la nôtre.

Nonobstant cette différence dans le sens de l'écriture, les Persans n'emploient et ne traduisent pas à rebours les nombres sanscrits. *Exemple.* Le manuscrit sanscrit sur l'Algèbre contient cent cinquante-trois feuilles ; ce nombre est exprimé dans la traduction persane par [*pl.* 1re,] (153) ; ces caractères sont arabes et diffèrent aujourd'hui des caractères indous, quoiqu'ils soient évidemment dérivés de celui-ci. Cette circonstance ajoute à la probabilité de l'opinion que les Persans ont tiré l'art de calculer des Indiens, mais indirectement, en le tenant de seconde main des Arabes.

Dans la traduction persane, les termes résultans de la multiplication des deux polynomes sont disposés à l'instar de la Table de Pythagore, ainsi qu'on le voit dans le tableau ci-joint, où l'on a multiplié le polynome $-3x+2y-2$ par le polynome $+4y-x+1$.

	$-3x$	$+2y$	-2
$+4y$	$-12xy$	$8y^2$	$-8y$
$-x$	$+3x^2$	$-2xy$	$+2x$
$+1$	$-3x$	$+2y$	-2

Les calculs ne sont pas distingués du discours; tout est écrit dans la même ligne, comme on en voit des exemples dans les anciens ouvrages de Burgo, de Bombelli, etc.

L'auteur parle toujours à la première personne. *Exemple.* J'opère ainsi ; je multiplie, etc.

Les commencemens des chapitres sont distingués par de l'encre rouge.

J'ai déjà dit plus haut que les Indiens résolvent l'équation du deuxième degré comme nous, en complétant le carré. J'ai remarqué qu'ils ont une méthode semblable pour résoudre dans quelques cas les équations des troisième et quatrième degrés. Voici des exemples tirés du Bija.

Soit l'équation $x^3+12x=6x^2+35$; en soustrayant des deux membres, $6x^2+8$, il vient $x^3-6x^2+12x-8=27$.

Les deux membres sont des cubes parfaits; extrayant de part et d'autre la racine cubique, on a $x-2=3$;

d'où $x=5$.

Soit encore l'équation $x^4-400x-2x^2=9999$,

équation qui n'est pas facile à compléter. L'auteur ajoute d'abord aux deux membres le binome $400x + 1$, et il obtient la nouvelle équation $x^4 - 2x^2 + 1 = 400x + 10000$; extrayant de part et d'autre la racine carrée, il vient $x^2 - 1 = \sqrt{400x + 10000}$. Comme le second membre n'est pas carré parfait, l'auteur revient sur ses pas et prend une autre voie. Il ajoute aux deux membres la quantité $4x^2 + 400x + 1$; il obtient ainsi l'équation $x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000$, dont les deux membres sont des carrés parfaits. Extrayant la racine carrée, il vient $x^2 + 1 = 2x + 100$;

d'où $x^2 - 2x + 1 = 100$; extrayant de nouveau la racine carrée, on a $x - 1 = 10$;

d'où $x = 11$.

Ce procédé a quelque ressemblance avec celui qui a été pratiqué depuis, sinon imité par Louis Ferrari. Quoi qu'il en soit, à l'exception de quelques cas particuliers, il ne paraît pas que les Indiens aient eu quelque méthode générale de résoudre les équations des troisième et quatrième degrés; car à la suite de l'exemple précédent l'auteur ajoute avec emphase : « La solution de telles questions exige un jugement droit, assisté du secours de Dieu. »

Les solutions de quelques problèmes d'analyse appliquée principalement aux triangles rectangles, qu'on trouve à la fin du premier Livre du Bija, font présumer que les Indiens connaissaient bien les propriétés de Géométrie contenues dans les Elémens d'Euclide. Quelques propositions de cet ouvrage sont citées sous des noms particuliers, et d'autres, selon M. Strachey, portent le quantième de la proposition et du livre d'Euclide; mais il est à croire que la dernière sorte de citation est une addition du traducteur ou du copiste. M. Strachey dit qu'il y a deux exemplaires où les Elémens sont cités sans être dénommés. On cite, par exemple, les quatrième et huitième propositions du deuxième Livre, sans dire de quel ouvrage. La quatrième est textuellement ainsi citée : « Par la quatrième figure du deuxième livre. » Et la huitième, par ces mots : « Par cette figure. » Et la figure pour la démonstration de cette proposition est en marge. La figure de la fiancée est une épithète qui sert à désigner le théorème de Pythagore. Dans un exemplaire on trouve ces mots : « Car la somme des côtés (du triangle) est toujours plus grande que l'hypothénuse pour la proposition à l'âne. »

Parmi les problèmes d'analyse appliquée, on trouve celui-ci : « 15 et 20 étant les deux côtés d'un triangle rectangle, on demande à trouver l'hypothénuse? »

L'auteur fait là-dessus cette observation. « Quoiqu'on sache par
» la figure de la fiancée, que l'hypothénuse est la racine carrée
» de la somme des carrés des deux côtés, pour obtenir une solution
» algébrique du problème, il faut procéder ainsi : supposons le
» triangle divisé en deux autres par la perpendiculaire abaissée du
» sommet de l'angle droit; calculons le segment du triangle rec-
» tangle qui a 15 pour hypothénuse, et le segment du triangle
» rectangle qui a 20 pour hypothénuse; établissant ensuite l'équa-
» tion, on aura ce qu'il faut. »

Le langage un peu obscur de l'original se réduit à ceci.

Soit ABC un triangle rectangle en B; $AB = 20$, et BD une perpendiculaire abaissée sur $BC = 15$

on a $$AD = \frac{20^2}{AC}, \quad CD = \frac{15^2}{AC}$$

or $$AD + CD = AC; \text{ donc } \frac{15^2 + 20^2}{AC} = \frac{625}{AC} = AC.$$

$$(AC)^2 = 625, \text{ d'où } AC = \sqrt{625} = 25.$$

Après ce problème, vient immédiatement le théorème suivant :
« le carré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à
» deux fois le rectangle des côtés de l'angle droit, plus le carré
» de la différence de ces côtés. Car en plaçant quatre triangles
» rectangles égaux, de manière que leurs hypothénuses forment
» les côtés d'un carré ; il y a au milieu de ce carré, un petit
» carré dont le côté est égal à la différence des côtés de l'angle
» droit ; et comme l'aire d'un triangle rectangle équivaut à la
» moitié du rectangle de ces côtés, il s'ensuit que l'aire des quatre
» triangles rectangles égaux, est équivalente au double du rec-
» tangle des côtés de l'angle droit, c'est-à-dire, à 600 dans
» l'exemple précédent. A ce nombre, j'ajoute 25, qui est le petit
» carré du milieu (car 5 est la différence des côtés 20 et 15), et la
» somme 625 est le grand carré construit sur l'hypothénuse, d'où
» l'on tire la grandeur de cette hypothènuse ou *chose cherchée*.
» De là on peut conclure aussi que la somme des carrés de deux
» nombres, est égale à deux fois le rectangle de ces nombres,
» plus le carré de leur différence. »

L'original porte en marge la figure (*pl.* 1) de quatre triangles égaux, réunis comme il est dit dans le théorème. Cette nouvelle démonstration du théorème de Pythagore est remarquable, en ce qu'on peut la regarder comme la démonstration indou de cette célèbre proposition. Peut-être même que cette figure géométrique, qui ressemble assez à celle de la chaise dont on se sert dans le pays

pour transporter la nouvelle mariée chez son époux, a donné lieu aux épithètes de figure de la fiancée, de la chaise nuptiale, que les écrivains orientaux donnent à cette proposition.

Le troisième Livre du Bija concerne les questions et les équations à plusieurs inconnues. L'auteur opère comme nous, et élimine successivement les inconnues jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'une seule. Il pose en principe, que le nombre des équations indépendantes doit être égal à celui des inconnues. Lorsqu'il y a plus d'inconnues que d'équations, il donne des valeurs arbitraires à quelques-unes de ces inconnues. Nous avons déjà dit que les Indiens se servaient de divers caractères et dénominations pour représenter les inconnues. Voici à cet égard, les propres paroles de l'auteur : « Ainsi, vous pouvez supposer que la première quan-
» tité cherchée soit l'inconnue, et que la deuxième quantité cher-
» chée soit noire, la troisième, bleue ; la quatrième, jaune, etc.,
» et ainsi de suite, en donnant des noms quelconques aux quan-
» tités qu'on desire connaître. Si au lieu de couleurs, vous voulez
» prendre d'autres objets, comme des lettres, etc., cela est en-
» core faisable. »

Ce même troisième Livre renferme des exemples très-curieux et très-difficiles, d'expressions algébriques qu'on fait devenir des carrés ou des cubes-parfaits. On y reconnaît la touche du maître, et une manière entièrement différente de celle de Diophante.

Les deux autres Livres contiennent aussi des questions d'analyse indéterminée, mais qui deviennent successivement plus difficiles et plus compliquées. Les questions suivantes se rapportent au cinquième chapitre de l'Introduction, et sont résolues dans l'ouvrage même. Nous allons les transcrire suivant notre notation.

1. $$\frac{w}{u}+\frac{x}{u}+\frac{y}{u}+\frac{z}{u}=\frac{w^2}{u^2}+\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{u^2}+\frac{z^2}{u^2}$$
$$\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{a^2}+\frac{v^2}{a^2}=\frac{r^3}{a^3}+\frac{s^3}{a^3}+\frac{r^3}{a^3}+\frac{v^3}{a^3}.$$

2. Trouver un triangle rectangle dont l'aire soit égale (numériquement) à son hypothénuse.

Trouver un triangle rectangle dont l'aire soit égale au produit de ces trois côtés.

3. $$\left.\begin{aligned} x+y &= \square \\ x-y &= \square \\ xy &= \text{cube} \end{aligned}\right\} \text{ensemble}$$

4. $$\begin{aligned} x^3+y^3 &= \square \\ x^2+y^2 &= \text{cube} \end{aligned}$$

5. $$\left.\begin{array}{r}w + 2 = a^2\\ x + 2 = b^2\\ y + 2 = c^2\\ z + 2 = d^2\\ wx + 18 = p^2\\ xy + 18 = q^2\\ yz + 18 = r^2\end{array}\right\}$$ ensemble, a, b, c, d étant en progression arithmétique.

$$a + b + c + d + p + q + r = 13^2 = 169.$$

6. $$\left.\begin{array}{r}7x^2 + 8y^2 = \square\\ 7x^2 - 8y^2 + 1 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

7. $$\left.\begin{array}{r}x + y = \square\\ x^3 + y^3 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

8. $$\left.\begin{array}{r}x^2 + y^2 + xy = r^2\\ (x + y)r + 1 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

9. $$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y = r^2\\ x^2 + y^2 = s^2\\ x + y + 2 = t^2\\ x - y + 2 = v^2\\ x^2 - y^2 + 8 = u^2\\ r + s + t + u + w = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

10. $$\left.\begin{array}{r}x + y + 3 = r^2\\ x - y + 3 = s^2\\ x^2 + y^2 - 4 = t^2\\ x^2 - y^2 + 12 = v^2\\ \frac{1}{2}xy + y = \text{cube} = u^3\\ r + s + t + v + u + 2 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

11. $$\left.\begin{array}{r}x^2 - y^2 - 1 = \square\\ x^2 + y^2 + 1 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

12. $$\left.\begin{array}{r}x^2 - y^2 + 1 = \square\\ x^2 + y^2 - 1 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

13. $$\left.\begin{array}{r}3x + 1 = \square\\ 5x + 1 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

14. $$\left.\begin{array}{l}3x + 1 = \text{cube} = r^3\\ 3r^2 + 1 = \square\end{array}\right\}$$ ensemble.

15. $$\left.\begin{array}{r}2(x^2 - y^2) + 3 = \square\\ 3(x^2 - y^2) + 3 = \square\end{array}\right\}$$

16. $\dfrac{x^2 - 4}{7} = y$; en nombres entiers.

Le moyen de rendre rationnelle l'expression $\sqrt{(ax+my)^2+ry}$, en faisant $ax+my=\frac{r-y}{2}$ est indiqué dans l'ouvrage.

Outre ce que nous venons d'extraire, le Bija Ganita renferme plusieurs recherches curieuses qui font présumer, dit M. Strachey, que les Indiens possèdent des ouvrages très-intéressans sur cette branche de l'Algèbre. Il est probable qu'on trouvera dans ces ouvrages une théorie des fractions continues, des méthodes d'approximations et des théories de séries et d'équations. Les règles du cinquième Livre du Bija, et les applications qu'en fait l'auteur, donnent lieu à penser que les Indiens avaient quelques connaissances des courbes et de l'usage des mathématiques dans la philosophie naturelle. Il est donc très-probable, comme nous l'avons déjà avancé, que l'Algèbre est originaire de l'Inde, ainsi que l'Arithmétique. Il est vrai que nous avons à cet égard peu de notions certaines, et que même les Arabes attribuent l'invention de l'Algèbre aux Grecs. Mais cette assertion des Arabes devient très-problématique, quand on considère que l'Algèbre de ce peuple diffère considérablement de l'Algèbre de Diophante, et qu'il est très-douteux que les Grecs aient jamais eu une Algèbre autre que celle de Diophante; d'ailleurs la facilité qu'on avait à Alexandrie de communiquer avec les Indes, rend très-incertaine l'origine grecque de l'Algèbre de Diophante; et la composition bien plus récente du Bija Ganita ne détruit pas cette incertitude; car il ne faut pas oublier que l'ouvrage sanscrit a été précédé par d'autres bien plus anciens, ainsi que l'a très-bien prouvé M. Davis, dans un savant Mémoire sur le cycle de 60 ans, inséré dans les Recherches asiatiques. C'est de ces anciens ouvrages indous, dont l'existence est très-probable, qu'auront été tirés non-seulement le Bija Ganita, mais aussi l'Algèbre des Grecs et des Arabes.

Sur le Lilavati.

Le Lilavati, le second ouvrage indou dont il a été question plus haut, traite des mesures des corps, de l'arithmétique, etc. Dans l'Introduction, nous lisons que « l'auteur de la collection » du Lilavati se nommait Bhasker Acharya, de la ville de » Bidder », sur la frontière septentrionale de l'Indostan. L'époque précise de la publication de l'ouvrage n'est pas bien connue; mais dans un autre ouvrage du même auteur, de l'année 1105[e] du

Salbahan, on trouve les raisons qui ont déterminé Bhasker à composer le Lilavati. Or le Salbahan, suivant la chronologie des Indiens, commence à l'an 80 de notre ère; donc le Lilavati a dû être composé vers l'année 1185 de l'ère chrétienne.

Dans le Ayeen Akbery (ouvrage persan sur l'histoire, les mœurs, les lois des Indiens), nous lisons que « Acharya était » un sectateur de Jina, qui expliquait les difficultés aux élèves. » De là nous pouvons conclure que Bhasker enseignait les mathématiques.

Le Lilavati commence par donner les premières règles de l'Arithmétique, et passe ensuite aux fractions, aux extractions des racines, etc. La règle d'alliage est traitée avec beaucoup d'étendue. Vers la fin on trouve quelque chose sur ce que l'auteur appelle *les formes*, et qui paraît avoir de l'analogie avec nos règles combinatoires.

Les différentes modifications que les chiffres ont subies dans leur forme, et que nous donnerons ici (Voyez la planche 1re.), nous autorisent à croire avec quelque raison, que les chiffres sont d'origine indou et qu'ils nous sont parvenus par l'Arabie, l'Afrique, l'Espagne, etc.; il serait en conséquence plus exact de les nommer chiffres indiens que chiffres arabes.

Dans l'opération de la multiplication, les Indiens procèdent de gauche à droite et reculent successivement les produits partiels d'un rang vers la droite.

Exemple.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 135 \\ \hline 12 \\ 36 \\ 60 \\ \hline 1620. \end{array}$$

En résumant ce qui précède, il paraît en résulter que les Indiens possédaient, dans les tems les plus reculés et dans une grande perfection, tout ce qu'on trouve non-seulement dans Diophante, mais aussi chez les Italiens avant les travaux de Tartaglia et de Cardan.

La Notice imparfaite qu'on vient de lire est tirée principalement du commentaire et de la traduction de M. Strachey. Il est à desirer que ce savant achève une entreprise commencée avec tant de distinction, et qu'il fasse bientôt jouir le public d'une production que les talens et les lumières de l'auteur nous garantissent devoir être aussi complète qu'utile.

P. S. Depuis l'impression de la Notice précédente, M. Strachey

m'a envoyé la traduction anglaise de la Préface que le traducteur persan (Fuzy) a mise au Lilavati; comme ce morceau renferme des faits curieux et des détails remarquables, je le transcris ici sous forme de *Post-Scriptum*.

Traduction de la Préface de Fyzi ou Lilavati.

« Par ordre du roi Akber, Fuzi traduit de l'indou en persan » le livre nommé le *Lilavati*, si célèbre par les rares et surprenans artifices de calcul qu'il contient. Il (Fuzi) prend la liberté » de rapporter que l'auteur de cet ouvrage était Bhascare Acharya, » dont le lieu de naissance, ainsi que celui de ses ancêtres, était » la ville de Biddur, dans le pays de Décan. Quoique la date » de l'ouvrage ne soit pas mentionnée, on peut la connaître à » peu près par la circonstance que le même auteur a fait un » autre ouvrage (nommé *Kurrun Kuttohol*) sur l'art de faire » les calendriers, et qui porte pour date la 1105^e^ année du » Salibahan, ère célèbre dans les Indes. Depuis cette époque » jusqu'à l'année actuelle, qui est la 32^e^ Ilahi, correspondant » à la 995^e^ de l'hégire (*), se sont écoulées 373 années.

» On dit que la composition du Lilavati a été occasionnée » par la circonstance suivante. Lilavati était le nom de la fille » de l'auteur (Bashker). L'ascendant de l'étoile qui dominait sa » naissance condamnait cette fille à passer sa vie dans le célibat » et à rester sans enfans. Cependant le père attendait une heure » favorable pour marier sa fille et lui faire contracter une union » stable et féconde. A l'approche de l'heure fatale, il fit venir » auprès de lui son enfant et l'époux qu'il lui destinait, et ayant » posé la coupe horaire près d'un vase rempli d'eau, il choisit » un astrologue connaisseur de l'état du ciel, pour observer le » moment précis où la coupe horaire serait remplie d'eau; ce » moment devait être celui de l'union des deux époux. Mais les » destins étant contraires à cette opération, il arriva que la jeune » personne, entraînée par une curiosité naturelle à son âge, » regarda dans la coupe horaire pour voir entrer l'eau. Une perle » se détacha accidentellement de son vêtement nuptial et tomba » dans le vase, et s'étant placée devant l'ouverture, elle empêcha l'eau de couler. Cependant l'astrologue était toujours » à attendre l'heure promise. L'opération de la coupe s'étant

---

(*) 1585 de J.-C.

» prolongée de beaucoup au-delà du tems ordinaire, le père
» était dans la consternation ; et en examinant l'instrument, il
» trouva qu'une petite perle avait bouché l'ouverture et arrêté
» le cours de l'eau, et qu'ainsi l'heure si impatiemment desirée
» était passée sans retour. Désolé de ce contre-tems, le père
» adresse ces paroles à sa fille : Je vais composer un ouvrage
» qui portera ton nom et passera aux tems les plus reculés.
» Bonne renommée est une seconde vie, et le principe d'une exis-
» tence éternelle. »

La Préface continue en ces termes :

« Des hommes versés dans les sciences, et particulièrement
» des astrologues du Décan, ont travaillé à cette traduction. On
» a conservé les termes indous pour lesquels on ne trouve pas
» de termes correspondans dans notre langue. L'ouvrage est di-
» visé en trois parties, savoir : une Introduction, des Règles et
» une Conclusion. »

Introduction.

Cette partie renferme les définitions des termes de la science du calcul ; le sens de certaines expressions en usage dans l'Arithmétique ; les divisions des poids, des mesures, du tems, etc., avec leur nomenclature. Quelques-unes de ces mesures sont curieuses par leur analogie avec les nôtres, qui en tirent peut-être leur origine. L'auteur prend le grain d'orge pour élément des poids et des mesures. Deux grains d'orge font un soorth ; 8 grains d'orge valent 1 doigt ; 24 doigts valent une coudée et 10 coudées forment le bambou ou la verge, mesure qui ne diffère pas beaucoup de la nôtre de même nom.

Le tems est divisé de cette manière : le tems pendant lequel on peut répéter dix fois de suite, ni trop lentement, ni trop vite, une syllabe comme *ta* ou *ka*, se nomme *pran ;* 6 prans font un pul ; 60 puls, un ghurry, et 60 ghurrys font un jour et une nuit ; ainsi :

60 ghurrys équivalent à nos	24 heures.
1 ghurry vaut donc.......	24 minutes.
1 pul....................	24 secondes.
1 pran...................	4 secondes.
1 ka est prononcé en.....	$\frac{1}{10}$ de seconde.

Sur l'écoulement de l'eau dans un cylindre vertical; par M. Poisson.

Pour déterminer le mouvement d'un fluide incompressible et pesant qui coule dans un vase de forme quelconque, il faut intégrer le système de ces deux équations (*) :

$$\left.\begin{aligned} kN\frac{du}{dt} - gh + \left(1 - \frac{k^2}{y'^2}\right)\cdot\frac{u^2}{2} = 0, \\ \frac{dh}{dt} + \frac{ku}{y'} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

La pression est supposée la même à la surface supérieure du fluide et à l'orifice horizontal par lequel il s'écoule; t représente le tems, u la vitesse à l'orifice, h la hauteur variable du fluide, y' l'aire de la section du vase correspondante à son niveau, k l'aire de l'orifice, g la pesanteur, et enfin N est une fonction de h donnée par cette intégrale

$$N = \int \frac{dz}{y},$$

dans laquelle y représente l'aire de la section horizontale du vase, faite à la distance quelconque z au-dessous du niveau du fluide, et qui doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$.

Si l'on élimine dt entre les deux équations (1), et qu'on fasse $u^2 = 2g\zeta$, il vient

$$\frac{k^2N}{y'}\cdot\frac{d\zeta}{dh} + h - \left(1 - \frac{k^2}{y'^2}\right)\zeta = 0. \quad (2)$$

La nouvelle variable ζ exprime la hauteur due à la vitesse u; et comme l'équation (2) est linéaire et du premier ordre, relativement à cette variable, il s'ensuit qu'on peut toujours séparer les variables ζ et h; il s'ensuit donc que la hauteur ζ, la vitesse u, et par suite le tems t, se détermineront par les quadratures en fonctions de h, quelle que soit la forme du vase. Dans le cas d'un cylindre vertical, on a $y = y' = b$, b étant une constante égale à la base du cylindre; on en conclut $N = \frac{h}{b}$, et en faisant, pour abréger, $\frac{b^2}{k^2} = m$, l'équation (2) devient

$$\frac{d\zeta}{dh} + m - (m - 1)\frac{\zeta}{h} = 0.$$

(*) *Voyez* mon Traité de Mécanique, tom. II, pag. 451.

Intégrant et désignant par c la constante arbitraire, on a

$$\zeta = \frac{m}{m-2}.(h - ch^{m-1}).$$

Substituons cette valeur dans celle de u^2; désignons par H la hauteur initiale du fluide, et déterminons la constante c par la condition que la vitesse u soit nulle à l'origine du mouvement, ou quand $h = H$, nous aurons

$$u^2 = \frac{2gmh}{m-2}.\left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}\right]. \qquad (3)$$

Donc à cause de $y' = b = k\sqrt{m}$, la seconde équation (1) donnera

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}}.\sqrt{\frac{m-2}{1-\left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}}}: \qquad (4)$$

ainsi quand le rapport m sera donné en nombre, il faudra intégrer cette formule pour déterminer le tems de l'écoulement du fluide.

Lorsqu'on a $m = 1$, l'orifice est égal à la base du cylindre; le fluide coule librement, et les équations (1) et (2) se réduisent aux formules ordinaires du mouvement des corps pesans. Il y a encore un autre cas dans lequel on peut intégrer l'équation (4) sous forme finie, c'est celui de $m = 3$. On a alors

$$dt = -\sqrt{\frac{H}{2g}}.\frac{dh}{\sqrt{Hh - h^2}};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$t = \sqrt{\frac{H}{2g}}.\text{arc}\left(\cos = \frac{2h - H}{H}\right):$$

on n'ajoute pas de constante, parce que l'on compte le tems t de l'origine du mouvement, de sorte qu'on ait à-la-fois $t = 0$ et $h = H$. Pour avoir le tems de l'écoulement entier, il faut faire $h = 0$; en le désignant par T, et par π, le rapport de la circonférence an diamètre, il vient

$$T = \pi\sqrt{\frac{H}{2g}};$$

et l'on voit que ce tems T, pendant lequel le cylindre se vide,

est le même que celui de l'oscillation d'un pendule qui aurait pour longueur la moitié de la hauteur initiale du fluide. Le tems pendant lequel la moitié du fluide s'écoule, répond à $h=\frac{1}{2}H$, et il est égal à la moitié du tems de l'écoulement entier.

Dans le cas de $m=2$, la formule (4) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; ainsi en développant l'exponentielle $\left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}$ suivant les puissances de $m-2$, réduisant et faisant ensuite $m=2$, on trouve pour sa véritable valeur

$$dt=-\frac{dh}{\sqrt{2gh}}.\left(\log\frac{H}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On ne peut pas intégrer cette expression sous forme finie, pour une valeur quelconque de h; mais on peut déterminer exactement le tems de l'écoulement entier, ou la valeur de l'intégrale définie prise depuis $h=H$ jusqu'à $h=0$. En effet, faisant $h=Hx^2$, et désignant ce tems par T, on trouve

$$T=\sqrt{\frac{H}{g}}.\int dx.\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Or, entre ces limites, Euler a trouvé

$$\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi};$$

on aura donc

$$T=\sqrt{\frac{\pi H}{g}}=\pi\sqrt{\frac{H}{\pi g}},$$

c'est-à-dire le tems de l'oscillation d'un pendule dont la longueur serait égale à $\frac{H}{\pi}$.

Nous allons montrer maintenant comment on peut transformer l'équation (4) de manière à rendre très-facile pour toutes les valeurs de m, le calcul du tems de l'écoulement entier du fluide.

Supposons d'abord $m>2$. On fera $h=Hx^2$, $H=g\frac{\theta^2}{2}$, et en appelant T le tems demandé, l'équation (4) donnera

$$T=\theta\sqrt{m-2}.\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2m-4}}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et θ désignant le tems pendant lequel un corps pesant parcourt la hauteur H. Or les intégrales définies de cette forme se ramènent à d'autres dont M. Legendre a calculé des Tables très-étendues qui vont trouver ici une application utile. Ces transcendantes, qu'il désigne par la lettre Γ, sont (*)

$$\Gamma(a)=\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1},$$

a étant une quantité positive, et l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Cela posé, on a, d'après un théorème connu (**),

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n.\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}, \qquad (5)$$

p, q, n étant des exposans positifs quelconques, et l'intégrale du premier membre ayant aussi pour limite $x=0$ et $x=1$. Donc, en faisant $p=1$, $n=2m-4$, $q=m-2$, on aura, relativement à l'intégrale que nous considérons,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2m-4}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2m-4).\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}\right)};$$

substituant dans la valeur de T, et observant que

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi},$$

il vient
$$T=\frac{\theta\sqrt{\pi}}{2\sqrt{m-2}}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}\right)}.$$

Les Tables de M. Legendre (***) donnent les logarithmes

(*) Ces intégrales reviennent par un simple changement de variable, aux intégrales de la forme $\int e^{-z}z^{a-1}dz$, prises depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{0}$. Sous cette forme, leurs principales propriétés sont démontrées dans le nouveau bulletin de la Société Philomatique, tom. II, pag. 243.

(**) Exercice du Calcul intégral, deuxième partie, pag. 279.

(***) *Idem*, pag. 302, et quatrième partie, pag. 85.

de la fonction $\Gamma(a)$, pour toutes les valeurs de a, de millième en millième, depuis $a=1$ jusqu'à $a=2$. Il faut donc, pour pouvoir en faire usage, que les quantités $\frac{1}{2m-4}$ et $\frac{m-1}{2m-4}$, tombent entre les limites 1 et 2; or c'est à quoi l'on parviendra toujours en les augmentant ou diminuant d'un certain nombre d'unités, au moyen de la formule

$$\Gamma(a+1)=a.\Gamma(a), \qquad (6)$$

que l'on peut appliquer successivement à a, $a+1$, $a+2$, etc. Ainsi l'on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}+1\right)=\frac{1}{2m-4}.\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}+1\right)=\frac{m-1}{2m-4}.\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}\right),$$

ce qui change la valeur précédente de T en

$$T=\frac{\theta\sqrt{\pi}(m-1)}{2\sqrt{m-2}}.\frac{\Gamma\left(\frac{2m-3}{2m-4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3m-5}{2m-4}\right)};$$

et maintenant, pour toutes les valeurs de m plus grandes que 3, les deux nombres compris sous le signe Γ tomberont immédiatement entre les limites 1 et 2.

Soit, pour exemple, $m=4$, ce qui suppose l'orifice moitié de la base du cylindre. On aura

$$\frac{2m-3}{2m-4}=1,25, \qquad \frac{3m-5}{2m-4}=1,75;$$

la Table de M. Legendre donne

$$\log\Gamma(1,25)=9,9573211, \quad \log\Gamma(1,75)=9,9633451;$$

on a aussi $$\log\sqrt{\frac{\pi}{2}}=0,0980604;$$

avec ces données on conclut

$$T=\theta(1,8541).$$

Maintenant si l'on a $m<2$, on écrira l'équation (4) sous

cette forme :

$$dt = -\frac{\sqrt{2-m}}{\sqrt{2gh}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{\left(\frac{H}{h}\right)^{2-m} - 1}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2-m}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{h^{\frac{1-m}{2}}\, dh}{\sqrt{H^{2-m} - h^{2-m}}} ;$$

faisant ensuite $h = Hx^{\frac{2}{3-m}}$, $H = \frac{g\theta^2}{2}$, et intégrant, on aura pour le tems T de l'écoulement entier,

$$T = \theta \cdot \frac{\sqrt{2-m}}{3-m} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\frac{4-2m}{3-m}}}} ;$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Or en faisant dans l'équation (5), $p = 1$, $n = \frac{4-2m}{3-m}$, $q = \frac{2-m}{3-m}$, et observant que $\Gamma\left(\frac{q}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, il vient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\frac{4-2m}{3-m}}}} = \frac{(3-m)\sqrt{\pi}}{4-2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3-m}{4-2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-2m}{4-2m}\right)} ;$$

et par conséquent $$T = \frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2-m}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3-m}{4-2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-2m}{4-2m}\right)}.$$

Prenons pour exemple $m = \frac{25}{16}$, ce qui suppose l'orifice égal aux quatre cinquièmes de la base du cylindre. Nous aurons

$$\frac{3-m}{4-2m} = \frac{23}{14} = 1,643, \qquad \frac{5-2m}{4-2m} = 2,143 ;$$

mais d'après l'équation (6), on a

$$\Gamma(2,143) = 1,143 \,.\, \Gamma(1,143) ;$$

et je trouve dans les Tables citées

$\log \Gamma(1,643) = 9,9537966$, $\log \Gamma(1,143) = 9,9709922$:

tout calcul fait, on a $T = \theta(1,4907)$,

c'est-à-dire à peu près une fois et demie le tems qu'un corps pesant emploierait à tomber de la hauteur initiale du fluide.

Il est encore bon de connaître la pression qui a lieu, pendant le mouvement, en un point quelconque du cylindre; or en appelant z la distance de ce point au-dessous du niveau variable du fluide, p la pression demandée, Π celle qui a lieu sur le niveau, ρ la densité du fluide, on trouve que la valeur de p se réduit, dans le cas du cylindre vertical, où l'on a $y=y'=b$, à (*)

$$p=\Pi+g\rho z-\frac{k\rho z}{b}\cdot\frac{du}{dt};$$

éliminant dt au moyen de la seconde équation (1), et u au moyen de l'équation (3), cette valeur devient

$$p=\Pi+g\rho z\left(\frac{m-1}{m-2}\right)\cdot\left[1-\left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}\right].$$

Dans l'état d'équilibre, cette pression serait $p=\Pi+g\rho z$; on voit donc que la pression, dans l'état de mouvement, est plus grande ou plus petite, à chaque instant, que la pression hydrostatique, selon que la quantité

$$\frac{m-1}{m-2}\cdot\left[1-\left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}\right]$$

est plus grande ou plus petite que l'unité. Si, par exemple, on suppose $m=3$, cette quantité devient $\frac{2(H-h)}{H}$; elle est donc plus petite que l'unité, dans la première moitié de l'écoulement, où l'on a $h>\frac{1}{2}H$, et plus grande, au contraire, dans la seconde partie. Quand la moitié du fluide est écoulée, on a $h=\frac{1}{2}H$, et à cet instant la pression est la même que si le fluide était en équilibre.

Dans le premier moment du mouvement, h diffère infiniment peu de H, et la valeur de p se réduit à $p=\Pi$; de sorte que la pression due au fluide disparaît entièrement, à l'instant où le fluide commence à couler. Ce résultat est subordonné à l'hypothèse du parallélisme des tranches, sur laquelle est fondée l'expression générale de la quantité p: il tient à ce que, dans cette hypothèse, le vase étant supposé cylindrique vertical et percé d'un orifice horizontal, les tranches fluides prennent au premier instant des vitesses infiniment petites, qui sont les mêmes que si ces tranches étaient libres, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

(*) Traité de Mécanique, tom. II, pag. 450.

Note sur une difficulté relative à l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre; par M. Poisson (*).

Lorsqu'on a une équation aux différences partielles du premier ordre., à trois variables et non linéaire par rapport aux différences, on fait dépendre son intégration de celle d'une autre équation linéaire et à quatre variables. L'intégrale de celle-ci renferme une fonction arbitraire de deux quantités, ce qui semblerait devoir en introduire une semblable dans l'intégrale de la proposée, laquelle ne doit cependant contenir qu'une fonction d'une seule quantité. Dans les leçons sur le calcul des fonctions (**) M. Lagrange dit que cette difficulté l'a long-tems tourmenté, et qu'il est enfin parvenu à la résoudre, en employant un changement de variables au moyen duquel il fait voir que la fonction double se réduit toujours à une fonction simple; mais cette méthode a l'inconvénient, ainsi que M. Lacroix l'a remarqué dans la seconde édition de son Calcul intégral (***), de compliquer la forme générale de l'intégrale, qui se trouve alors représentée par le système de trois équations, tandis que dans chaque cas elle doit être exprimée par deux équations seulement. En suivant une marche différente, on parvient, d'une manière qui me semble plus directe, à lever complètement la difficulté dont nous parlons, ou plutôt à montrer qu'elle n'est qu'apparente, et l'on a en même tems l'avantage de conserver à l'intégrale la forme simple qu'elle doit avoir : c'est ce que je me propose de faire voir dans cette note.

Représentons l'équation proposée par

$$f(x, y, z, p, q) = 0; \qquad (1)$$

p et q désignant les différences partielles de z par rapport à x et à y. On tirera de là la valeur de p pour la substituer dans

$$dz = pdx + qdy; \qquad (2)$$

(*) Cette note a été publiée dans le Bulletin de la Société Philomatique, en novembre 1815, pag. 183. Nous la rapportons ici, pour servir d'éclaircissement à la méthode donnée par M. Monge, pour l'intégration des équations aux différences partielles des surfaces courbes. H. C.

(**) Journal de l'École Polytechnique, douzième cahier, pag. 311.

(***) Tome II, pag. 555.

et l'on disposera de la quantité q, qui reste indéterminée, pour rendre intégrable cette valeur de dz. Or on sait que q devra alors être donnée par l'équation

$$\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dz}.q-\frac{dq}{dx}-\frac{dq}{dz}.p=0, \tag{3}$$

dans laquelle il faudra aussi substituer la valeur de p, et qui sera, en x, y, z et q, l'équation auxiliaire dont nous venons de parler.

L'intégrale de cette équation (3) dépend de trois équations différentielles ordinaires que nous n'aurons pas besoin d'écrire; nous représenterons leurs intégrales complètes par

$$a=f_1(x,y,z,q),\ b=f_2(x,y,z,q),\ c=f_3(x,y,z,q); \tag{4}$$

a, b, c étant les constantes arbitraires : l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$a=\Pi(b,\ c), \tag{5}$$

Π désignant une fonction arbitraire.

Supposons l'une des équations (4), la première, par exemple, résolue par rapport à q; soit

$$q=\psi(x,\ y,\ z,\ a) \tag{6}$$

la valeur qu'on en tire; substituons-la dans les deux autres équations, ce qui donne des résultats de cette forme :

$$b=\psi_1(x,\ y,\ z,\ a),\quad c=\psi_2(x,\ y,\ z,\ a);$$

substituons ensuite ces valeurs de b et c dans l'équation (5), nous aurons

$$a=\Pi[\psi_1(x,\ y,\ z,\ a),\ \psi_2(x,\ y,\ z,\ a)]; \tag{7}$$

et nous pouvons dire maintenant que la valeur la plus générale de q qui satisfasse à l'équation (3), et qui ait, par conséquent, la propriété de rendre intégrable l'équation (2), est exprimée par l'équation (6), en y considérant a comme une quantité donnée par l'équation (7).

Cela posé, la valeur de a sera, ou une quantité variable dépendante de la forme qu'on donnera à la fonction Π, ou une constante arbitraire quand on prendra pour cette fonction une semblable constante. Supposons d'abord que le second cas ait lieu; concevons qu'on ait intégré l'équation (2); après y avoir subs-

titué à la place de p et q, leurs valeurs tirées des équations (1) et (6), et désignons son intégrale par

$$F\,(x,\ y,\ z,\ a) = k, \qquad (8)$$

k étant la constante arbitraire. Si l'on veut présentement avoir l'intégrale de la même équation (2), dans l'hypothèse de a variable, il est évident qu'on peut encore supposer qu'elle soit représentée par l'équation (8), pourvu qu'on y regarde k comme une nouvelle variable, et qu'on détermine convenablement sa valeur, c'est-à-dire, de manière que la différentielle de l'équation (8) reste la même quand a et k sont constantes, et lorsque a et k sont devenues variables. Il faudra donc qu'on ait

$$\frac{d.F\,(x,\ y,\ z,\ a)}{da}\,da = dk; \qquad (9)$$

or cette équation ne saurait subsister, à moins que le coefficient de da, dans le premier membre, ne soit une fonction de a et k sans x, y, z; ainsi Π_1 désignant une fonction arbitraire, il faudra que l'équation qui sert à déterminer a revienne à celle-ci.

$$\frac{d.F\,(x,\ y,\ z,\ a)}{da} = \Pi_1\,(a,\ k), \qquad (7')$$

laquelle, par conséquent, devra être identique avec l'équation (7). Cela étant, on aura $dk = \Pi_1\,(a,\ k)\,da$; et de cette équation on tirera $k = \varphi a$, ce qui change les équations (8) et (9) en celles-ci :

$$F\,(x,\ y,\ z,\ a) = \varphi a,\quad \frac{d.F\,(x,\ y,\ z,\ a)}{da} = \frac{d.\varphi a}{da}, \qquad (10)$$

qui représenteront l'intégrale générale de l'équation (2). Quant à l'équation (7), elle est maintenant superflue, car elle peut être remplacée par l'équation (7'), qui devient

$$\frac{d.\varphi a}{da} = \Pi_1\,(a,\ k) = \Pi_1\,(a,\ \varphi a),$$

et qui ne fait qu'établir une relation entre les deux fonctions arbitraires désignées par φ et Π_1, dont la seconde n'entre pas dans les équations (10).

Nous pouvons conclure de là :

1°. Que l'intégrale générale de l'équation (2), ne contient qu'une fonction arbitraire d'une seule quantité, quoique la valeur de q soit donnée par une équation renfermant une fonction de deux quantités;

2°. Que, pour l'obtenir, il suffit de connaître une intégrale par-

ticulière de l'équation (3), renfermant une simple constante arbitraire, c'est-à-dire une des trois équations (4); ce qui coïncide avec la méthode ordinaire.

On vérifiera sans peine tout ce qui précède, sur l'équation $z - pq = 0$, que M. Lagrange a prise pour exemple, et particulièrement l'identité des équations (7) et (7′), que nous avons démontrée d'une manière générale.

En effet, les trois intégrales particulières dont dépend son intégrale complète, ou les équations (4), sont, dans ce cas (*),

$$a = q - x, \quad b = \frac{z}{q^2}, \quad c = y - \frac{z}{q};$$

tirant la valeur de q de la première et la substituant dans les deux autres, il vient

$$b = \frac{z}{(a+x)^2}, \quad c = y - \frac{z}{a+x};$$

par conséquent l'équation (7) sera

$$a = \Pi\left(\frac{z}{(a+x)^2},\ y - \frac{z}{a+x}\right). \quad (7)$$

En mettant pour p et q leurs valeurs, savoir :

$$q = a + x, \quad p = \frac{z}{q} = \frac{z}{a+x},$$

dans $dz = pdx + qdy$, on a

$$dz = \frac{zdx}{a+x} + (a+x)dy: \quad (a)$$

c'est donc cette équation qu'il faut intégrer, en y regardant a comme déterminée par l'équation (7). J'intègre d'abord dans l'hypothèse de a constante, ce qui donne

$$z = (a+x)(y+k), \quad \text{ou} \quad \frac{z}{a+x} - y = k,$$

k étant la constante arbitraire. Pour étendre cette intégrale au cas de a variable, il faut y joindre sa différentielle par rapport à a et k, ainsi qu'on l'a dit plus haut; on a alors

$$-\frac{zda}{(a+x)^2} = dk;$$

(*) Calcul intégral de M. Lacroix, pag. 556.

mais l'équation (7) se réduit à

$$a = \Pi\left(\frac{z}{(a+x)^2}, -k\right);$$

et elle montre que la quantité $\frac{z}{(a+x)^2}$ est une fonction de a et k; donc, en vertu de l'équation précédente, k ne peut être qu'une fonction de a. Soit, par conséquent, $k = \phi a$; l'intégrale générale de l'équation (a) sera exprimée par le système de ces deux équations :

$$\frac{z}{a+x} - y = \varphi a, \qquad -\frac{z}{(a+x)^2} = \frac{d.\varphi a}{da},$$

et l'équation (7) deviendra

$$a = \Pi\left(-\frac{d.\varphi a}{da}, -\varphi a\right);$$

de sorte qu'elle ne fera qu'établir une relation entre la fonction ϕ et la fonction Π, ce qu'il s'agissait de vérifier.

Sans entrer dans de plus grands détails, nous nous contenterons d'observer que le même exemple peut servir à deux autres vérifications semblables, en partant successivement de la seconde et de la troisième équation (4), c'est-à-dire en prenant successivement les constantes b et c et les équations qui les contiennent, à la place de la constante a et de la première équation (4).

RAPPORT *fait à l'Institut, le* 11 *décembre* 1815, *par M.* LEGENDRE, *sur un Mémoire de* A. L. CAUCHY, *intitulé :* Démonstration générale du théorème de FERMAT, sur les nombres polygones.

Quoique la théorie des nombres ait fait de grands progrès dans ces derniers tems, et qu'elle soit beaucoup plus avancée maintenant qu'elle ne l'était du tems de *Fermat*; cependant le beau théorème sur les nombres polygones, dû à ce savant célèbre, n'a encore été démontré que dans ses deux premières parties, qui sont relatives aux nombres triangulaires et aux carrés ; de sorte que tout ce qui regarde les autres polygones à l'infini, reste encore à démontrer.

Il y a lieu de s'étonner que les géomètres, qui ont su vaincre tant d'autres difficultés, aient été arrêtés jusqu'ici devant une

simple question de nombres dont *Fermat* avait trouvé la solution complète. Ce genre de difficulté toute particulière, qu'on rencontre dans la théorie des nombres, ne peut s'expliquer que par le peu de liaison qu'il y a entre les différentes parties de cette théorie, et parce que dans chaque nature de question il faut en quelque sorte créer un principe ou une méthode particulière pour la résoudre. On en voit un exemple dans les démonstrations qui ont été données des deux premiers cas du théorème de *Fermat*, puisque le premier cas relatif aux nombres triangulaires, fait partie de la théorie générale des formes trinaires des nombres, et n'a été démontré que long-tems après le second cas, qui est tout-à-fait indépendant de cette théorie.

Quoi qu'il en soit, il était à desirer pour l'intérêt de la science et pour la satisfaction des géomètres, que le théorème sur les nombres polygones fût enfin démontré dans toute sa généralité, et c'est l'objet que s'est proposé M. Cauchy, dans le Mémoire dont nous allons rendre compte.

M. Cauchy suppose les deux premiers cas démontrés ; il suppose, de plus, ce qui est un résultat général de la théorie des formes trinaires des nombres, qu'on peut toujours décomposer en trois carrés tout nombre proposé qui n'est pas de la forme $8n+7$, ou le produit de $8n+7$ par une puissance de 4 : il établit ensuite un principe entièrement nouveau.

Il remarque d'abord qu'étant donné un nombre k composé de quatre carrés dont les racines font une somme égale à s, le quadruple de ce nombre peut toujours être représenté pour quatre carrés dont l'un est s^2.

De là il conclut qu'étant donnés deux nombres k et s de même espèce, c'est-à-dire tous deux pairs ou tous deux impairs, si s est compris entre les limites $\sqrt{4k}$ et $\sqrt{(3k-2)}-1$; si en outre $4k-s^2$ n'est pas de la forme $4^a(8n+7)$, il sera toujours possible de décomposer le nombre k en quatre carrés dont les racines prises positivement fassent une somme égale à s.

Cette proposition, très-belle et très-générale, est le fondement de la démonstration de M. Cauchy ; elle apporte un perfectionnement remarquable au second cas du théorème de *Fermat*, puisqu'elle offre le moyen non-seulement de partager un nombre donné en quatre carrés, mais encore de faire ensorte que la somme des racines de ces carrés soit égale à un nombre donné, pris entre certaines limites qui s'éloignent de plus en plus, à mesure que le nombre proposé devient plus grand.

Les limites que M. Cauchy assigne aux valeurs de s, sont celles avec lesquelles on est assuré d'obtenir, dans chaque cas, une solution où toutes les racines sont prises positivement pour

former la valeur de s. Si on se permettait de prendre arbitrairement les signes de racines dont les carrés composent la valeur du nombre donné k, la somme s de ces racines pourrait être fort inférieure à la moindre des limites supposées, ce qui augmenterait le nombre des cas résolubles; mais pour l'application que l'auteur a eu en vue, une condition essentielle est de n'admettre dans la somme s que les racines prises positivement, attendu que l'expression générale des nombres polygones, passé l'ordre des carrés, indique deux séries différentes, selon qu'on prend l'indice de chaque terme positif ou négatif. Ces deux séries considérées analytiquement sont coordonnées entr'elles, de manière que l'une n'est que le prolongement de l'autre, et que les deux réunies ne forment qu'un même système qui s'étend à l'infini, tant dans le sens des indices positifs, que dans le sens des indices négatifs. Or l'énoncé du théorème de *Fermat* est restreint aux nombres polygones pris dans le sens positif, et on ne doit faire entrer aucunement en considération la série qui a lieu dans le sens négatif.

Pour donner maintenant une idée de la méthode que suit l'auteur dans la démonstration du théorème de *Fermat*, considérons l'expression générale d'un nombre quelconque P qui serait composé, conformément au théorème, de n nombres polygones de l'ordre n; cette expression sera de la forme $Ak+Bs$, dans laquelle A et B sont des coefficiens constans qui ne dépendent que de n; s est la somme des indices de tous les polygones, et k la somme de leurs carrés. La question serait de déterminer pour chaque nombre proposé P, les valeurs de k et de s, avec la condition que k ne comprenne que n carrés au plus, et que s soit la somme de leurs racines prises positivement.

Cette question, qui n'est que l'énoncé de la proposition générale à démontrer, paraît trop vague et trop indéterminée pour que l'analyse puisse lui être appliquée avec succès. M. Cauchy a eu l'idée heureuse de restreindre le problème, en supposant que sur les n polygones, qui doivent composer le nombre P, il y en a $n-4$ égaux à zéro ou à l'unité indistinctement. Ainsi au lieu de la formule $Ak+Bs$, M. Cauchy prend $Ak+Bs+r$, r étant un nombre positif qui ne doit pas surpasser $n-4$; alors k ne doit plus contenir que quatre carrés indéterminés, et s représente toujours la somme de leurs racines prises positivement.

Cela posé, si on prend pour k un nombre impair assez grand pour qu'il y ait au moins deux nombres impairs compris entre les limites qui conviennent au nombre s, ce qui suppose seulement que k n'est pas <121; M. Cauchy fait voir que la for-

mule $Ak+Bs+r$ représentera tous les nombres entiers compris entre la plus petite et la plus grande valeur dont cette formule est susceptible, à raison des limites de s; d'où il suit que tous ces nombres peuvent être décomposés en n polygones dont $n-4$ seront égaux à zéro ou à l'unité.

La même formule, en augmentant k de deux unités, et prenant s dans les limites qui conviennent à cette nouvelle valeur de k, fournira la même conclusion, c'est-à-dire, qu'on aura une seconde suite de nombres entiers plus grands que ceux de la première suite, lesquels seront également décomposables en n polygones de l'ordre n.

On prouve d'ailleurs que ces deux suites ne laissent point de lacune entr'elles, mais plutôt que la fin de l'une se confond avec le commencement de l'autre, de sorte qu'étant réunies elles offrent la série complète de tous les nombres entiers compris depuis le plus petit terme de la première suite jusqu'au plus grand terme de la seconde.

Il est inutile d'en dire davantage, et on voit qu'en prenant pour k des nombres impairs de plus en plus grands, la formule $Ak+Bs+r$ représentera successivement tous les nombres entiers depuis celui qui répond aux moindres valeurs de k et de s jusqu'à l'infini. Par conséquent tous ces nombres sont décomposables en n nombres polygonaux dont $n-4$ sont égaux à zéro ou à l'unité.

Il ne reste donc à examiner que les nombres compris dans la même formule $Ak+Bs+r$, lorsque k est inférieur à 121. Or cet examen est sans difficulté, puisqu'il n'y a qu'un nombre limité de valeurs de k à considérer; et d'ailleurs l'auteur avait préparé d'avance la solution de ces cas particuliers, par quelques propositions subsidiaires. Il est donc bientôt conduit à la conclusion générale, qui est que tout nombre entier peut être représenté par la formule $Ak+Bs+r$ avec les conditions prescrites, et qu'ainsi tout nombre entier peut être décomposé en n polygones de l'ordre n, dont $n-4$ sont égaux à zéro ou à l'unité.

La supposition qu'avait faite M. Cauchy pour simplifier la solution du problème, se trouve ainsi justifiée par la conclusion à laquelle il parvient. Non-seulement donc il démontre le théorème de *Fermat* dans toute sa généralité, pour tous les polygones au-delà des carrés; mais il substitue au théorème de *Fermat* un théorème beaucoup plus précis et plus intéressant, puisqu'il prouve que sur les n nombres polygonaux qui entrent dans la composition d'un nombre donné quelconque, il y en a toujours $n-4$ égaux à zéro ou à l'unité.

Il résulte en même tems de l'analyse de M. Cauchy, que

la décomposition effective d'un nombre donné en n polygones de l'ordre n peut toujours s'opérer *à priori*, en supposant seulement qu'on sache décomposer en trois carrés les nombres qui sont susceptibles de cette décomposition.

Nous concluons de ce qui précède que le Mémoire de M. Cauchy offre une nouvelle preuve du talent et de la sagacité que l'auteur a montrés dans d'autres recherches également utiles au progrès de l'Analyse et de la Géométrie. Nous pensons en conséquence que ce Mémoire est digne des éloges de la Classe, et d'être imprimé dans le Recueil des Savans étrangers.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Théorème. « Lorsque deux surfaces quelconques du second degré » sont circonscrites à une troisième surface du même degré, elles » se coupent toujours dans le système de deux courbes planes » du second degré. » (*Voyez* la *Correspondance*, tome II, page 321 et la page 339 de ce cahier).

Démonstration de cette proposition, dans le cas particulier où les trois surfaces du second degré ont pour diamètres conjugués les parallèles aux trois droites D, D', D'', dont deux D, D' sont dirigées du centre de la surface inscrite aux centres des deux surfaces circonscrites, et la troisième D'', est l'intersection des plans des deux courbes de contact.

Supposons que les trois surfaces soient rapportées à trois axes parallèles aux droites D, D', D'', et que le centre de la surface inscrite soit l'origine des coordonnées, l'équation de cette première surface sera

$$(A) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

dans laquelle les quantités A, B, C sont trois constantes données à volonté; et en nommant a, b les distances de l'origine aux centres des deux surfaces qui circonscrivent la première, les équations de ces deux surfaces pourront d'abord être mises sous les formes suivantes :

$$(B) \qquad A'(x-a)^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1,$$
$$(C) \qquad A''x^2 + B''(y-b)^2 + C''z^2 = 1,$$

puisque le centre de l'une est sur la droite des x, et que le centre de l'autre est sur la droite des y. Les six quantités A', B', C', A'', B'', C'', que renferment ces équations, sont encore

des constantes ; mais elles ne peuvent pas être prises arbitrairement, et il faut les déterminer de manière que les deux dernières surfaces soient circonscrites à la première.

Or lorsque deux surfaces sont circonscrites, toutes les sections faites dans les deux surfaces, par un plan parallèle à celui de leur courbe de contact, sont semblables entr'elles et semblablement placées ; donc les dimensions homologues de ces sections sont entr'elles dans le même rapport. Ainsi en nommant e ce rapport pour le cas du premier contact, on aura

$$B' = e^2 B,$$
$$C' = e^2 C;$$

et nommant e' le rapport pour le cas du second contact, on aura

$$A'' = e'^2 A,$$
$$C'' = e'^2 C,$$

équations dans lesquelles les rapports e, e' sont élevés au carré, parce que les constantes A, B, C, B', C', A'', B'' sont toutes de deux dimensions.

Si l'on substitue pour B', C', A'', C'' ces valeurs dans (B), (C), ces équations deviendront

$$A'(x-a)^2 + e^2(By^2 + Cz^2) = 1,$$
$$B''(y-b)^2 + e'^2(Ax^2 + Cz^2) = 1,$$

ou

$$(D) \qquad A'(x-a)^2 - Ae^2x^2 + e^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = 1,$$
$$(E) \qquad B''(y-b)^2 - Be'^2y^2 + e'^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2) = 1.$$

Actuellement, si l'on cherche l'intersection de la première surface, dont l'équation est (A), avec chacune des deux surfaces circonscrites, dont les équations sont (D) et (E), en éliminant la quantité $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, qui est commune à ces trois équations, on aura pour la première intersection,

$$(F) \qquad A'(x-a)^2 - Ae^2x^2 + e^2 - 1 = 0,$$

et pour la seconde

$$(G) \qquad B''(y-b)^2 - Be'^2y^2 + e'^2 - 1 = 0,$$

équations du second degré algébriques, l'une en x, l'autre en y, dont les résolutions donnent

$$(A' - Ae^2)x = A'a + \sqrt{Ae^4 + e^2(AA'a^2 - A - A') + A'},$$
$$(D'' - Be'^2)y = B''b + \sqrt{Be'^4 + e'^2(BB''b^2 - B - B'') + B''},$$

et prouvent que la première surface, dont l'équation est (A), coupe les deux autres, considérées dans l'état où les représentent les équations (D) et (E), chacune dans le système de deux plans parallèles entr'eux, et au plan de leur courbe de contact respective.

Mais, par l'hypothèse, les deux dernières surfaces sont circonscrites à la première; donc, pour chacune d'elles, les deux plans de son intersection avec la première se confondent; par conséquent les deux radicaux des deux dernières équations sont l'un et l'autre égaux à zéro, ce qui détermine les valeurs de e, e', et les équations (F) et (G) sont chacune un carré parfait dont les racines sont

$$(A'-Ae^2)x-A'a=0 \quad \text{pour l'une,}$$

et $$(B''-Be'^2)y-B''b=0 \quad \text{pour l'autre.}$$

Tout étant ainsi préparé, considérons actuellement l'intersection des deux surfaces circonscrites dont les équations sont (D), (E). On aura l'équation de sa projection sur le plan des x, y, en éliminant z entre les équations de ces deux surfaces, ou bien en éliminant la parenthèse commune $(Ax^2+By^2+Cz^2)$, qui seule contient z, ce qui donne

$$e'^2\left\{A'(x-a)^2-Ae^2x^2-1\right\}-e^2\left\{B''(y-b)^2-B'e'^2y^2-1\right\}=0,$$

ou ajoutant dans les deux parenthèses, qui sont de signes contraires, la même quantité $e^2e'^2$,

$$(H)\qquad \begin{aligned} &e'^2\left\{A'(x-a)^2-Ae^2x^2+e^2-1\right\}\\ -\,&e^2\left\{B''(y-b)^2-Be'^2y^2+e'^2-1\right\}=0. \end{aligned}$$

Or ces parenthèses ne sont autre chose que les premiers membres des équations (F), (G), qui, comme nous venons de le voir, sont deux carrés parfaits; donc l'équation (H) de la projection sur le plan des x, y de l'intersection des deux surfaces circonscrites est

$$e'^2\left\{(A'-Ae^2)x-A'a\right\}^2-e^2\left\{(B''-Be'^2)y-B''b\right\}^2=0,$$

dont le premier membre est la différence de deux carrés, et équivaut par conséquent au système des deux équations linéaires

$$e'\left\{(A'-Ae^2)x-A'a\right\}+e\left\{(B''-Be'^2)y-B''b\right\}=0,$$
$$e'\left\{(A'-Ae^2)x-A'a\right\}-e\left\{(B''-Be'^2)y-B''b\right\}=0.$$

Donc l'intersection elle-même est comprise dans le système des

deux plans auxquels appartiennent les deux équations précédentes, et sont par conséquent des courbes du second degré.

On connaissait depuis très-long-tems quelques cas particuliers de cette proposition générale. On savait, par exemple, que dans les voûtes d'arêtes ou en arcs de cloître, droites ou biaises, horizontales ou rampantes, les arêtes saillantes ou rentrantes de ces voûtes sont toujours des ellipses planes, parce qu'elles sont les intersections de surfaces cylindriques circonscrites à la surface d'un même ellipsoïde. Il en est de même des voûtes d'arêtes en arcs de cloître multiples, qui couvrent ordinairement les *ronds-points* de nos vieilles églises gothiques, ou les salons de quelques-unes de nos abbatiales ; mais le théorème que nous venons de démontrer est d'une généralité beaucoup plus grande. Nous observerons même à cet égard que, comme dans la démonstration nous n'avons pas fait attention aux signes des neuf coefficiens A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' qui entrent dans les trois équations (A), (B), (C). La vérité du théorème est indépendante du nombre de sommets réels dont chacune des trois surfaces de second degré que l'on considère est susceptible ; ainsi chacune d'elles peut-être indifféremment un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à une nappe, ou un hyperboloïde à deux nappes, sans que le théorème cesse d'avoir lieu. Enfin il aurait encore lieu quand même les trois surfaces auraient leurs centres à l'infini. (*Article de M. Monge.*)

Propriétés des diamètres de l'ellipsoïde; par M. Chasles, *ancien élève de l'École Polytechnique.*

Lemme.

(1) « Si entre les neuf quantités α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''
» on a les six équations

» (a)... $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,$
» (b)... $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0,\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,$

» l'on aura les quinze suivantes :

» (c)... $\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1,\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,$
» (d)... $\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,\ \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0,\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,$

» (e)... $$\left\{\begin{array}{lll} \alpha=\beta'\gamma''-\beta''\gamma', & \alpha'=\beta''\gamma-\beta\gamma'', & \alpha''=\beta\gamma'-\beta'\gamma, \\ \beta=\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'', & \beta'=\alpha\gamma''-\alpha''\gamma, & \beta''=\alpha'\gamma-\alpha\gamma', \\ \gamma=\alpha'\beta''-\alpha''\beta', & \gamma'=\alpha\beta''-\alpha''\beta, & \gamma''=\alpha\beta'-\alpha'\beta. \end{array}\right.$$ »

En effet, α, β, γ ; α', β', γ' ; α'', β'', γ'' peuvent représenter

les cosinus des angles que trois droites rectangulaires R, R', R'' font avec trois axes x, y, z également rectangulaires ; car les six équations proposées exprimeront que la somme des carrés des cosinus des angles qu'une des droites R, R', R'' fait avec les trois axes, est égale à l'unité, et que les angles de ces droites sont droits.

D'après cela, les six équations (c) et (d) auront lieu ; car elles indiqueront que la somme des carrés des cosinus des angles qu'un des axes x, y, z fait avec les trois droites R, R', R'' est égale à l'unité, et que les angles de ces axes sont droits.

Enfin pour vérifier une des neuf équations (e), la première, par exemple, on observera que le cosinus de l'angle que le plan des deux droites R', R'' fait avec le plan des zy est

$$\frac{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}{\sqrt{(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2}}$$
$$=\frac{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}{\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)-(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2}};$$

Or le dénominateur se réduit à l'unité, en vertu des deuxième, troisième et sixième équations, on a donc simplement $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$; mais ce cosinus est le même que celui que la droite R fait avec l'axe des x, lequel est α ; l'on a donc

$$\alpha=\beta'\gamma''-\gamma'\beta''.$$

On prouverait semblablement que les huit dernières équations sont vraies.

(2) Soit l'ellipsoïde (*)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

rapporté à ses trois axes rectangulaires.

Appelons α, β, γ les cosinus des angles qu'un diamètre R fait avec ces axes, on aura

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{a^2}\alpha^2+\frac{1}{b^2}\beta^2+\frac{1}{c^2}\gamma^2.$$

Les coordonnées $x=a\alpha$, $y=b\beta$, $z=c\gamma$ peuvent représenter l'extrémité d'un diamètre r de l'ellipsoïde, car elles satisfont à son équation ; la longueur de ce diamètre a pour carré

$$r^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2.$$

Les coordonnées de l'extrémité de r indiquent la construction sui-

(*) *Voyez* Le traité des surfaces du second degré, par M. Hachette, p. 169.

vante pour obtenir ce diamètre, quand on connaît la direction du premier R.

On décrira trois sphères concentriques à la surface et qui aient pour rayons a, b, c; par les points où elles couperont le diamètre R on mènera trois plans parallèles aux plans zy, zx, xy respectivement; leur point d'intersection sera l'extrémité du diamètre r.

Des diamètres R', R'',... on déduira semblablement les diamètres r', r'',..., et l'on aura

$$\frac{1}{R'^2}=\frac{1}{a^2}\alpha'^2+\frac{1}{b^2}6'^2+\frac{1}{c^2}\gamma'^2,\quad r'^2=a^2\alpha'^2+b^26'^2+c^2\gamma'^2,$$

$$\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{a^2}\alpha''^2+\frac{1}{b^2}6''^2+\frac{1}{c^2}\gamma''^2,\quad r''^2=a^2\alpha''^2+b^26''^2+c^2\gamma''^2,$$

....

(3) Si à l'extrémité du diamètre r on mène un plan tangent, et que du centre de la surface on lui abaisse une perpendiculaire, elle sera égale au diamètre R; car ce plan a pour équation

$$\frac{1}{a}\alpha x+\frac{1}{b}6y+\frac{1}{c}\gamma z=1,$$

et la longueur de la perpendiculaire est

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\alpha^2+\frac{1}{b^2}6^2+\frac{1}{c^2}\gamma^2}}=R.$$

(4) Si les trois diamètres R, R', R'', sont rectangulaires, les trois r, r', r'' seront des diamètres conjugués.

En effet, pour rapporter la surface à des coordonnées X, Y, Z parallèles à r, r', r'' respectivement, on fera :

$$x=\frac{a\alpha}{r}X+\frac{a\alpha'}{r'}Y+\frac{a\alpha''}{r''}Z,$$

$$y=\frac{b6}{r}X+\frac{b6'}{r'}Y+\frac{b6''}{r''}Z,$$

$$z=\frac{c\gamma}{r}X+\frac{c\gamma'}{r'}Y+\frac{c\gamma''}{r''}Z.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipsoïde et indiquant que les termes en XY, XZ, YZ doivent disparaître pour que r, r', r'' soient conjugués, on aura les trois conditions $\alpha\alpha'+66'+\gamma\gamma'=0$, $\alpha\alpha''+66''+\gamma\gamma''=0$, $\alpha'\alpha''+6'6''+\gamma'\gamma''=0$;

lesquelles auront toujours lieu quand R, R', R'' seront rectangulaires.

Ainsi quand r, r', r'' seront conjugués, les vingt-une équations du lemme (1) auront lieu.

(5) « La somme des carrés des valeurs inverses de trois diamètres rectangulaires est une quantité constante. »

En effet,

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{a^2}(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)+\frac{1}{b^2}(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)$$
$$+\frac{1}{c^2}(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2),$$

ou

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \qquad (c)$$

(6) Les plans tangens aux extrémités des diamètres R, R', R'' ont pour équations

$$\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z=\frac{1}{R};$$
$$\frac{\alpha'}{a^2}x+\frac{\beta'}{b^2}y+\frac{\gamma'}{c^2}z=\frac{1}{R'},$$
$$\frac{\alpha''}{a^2}x+\frac{\beta''}{b^2}y+\frac{\gamma''}{c^2}z=\frac{1}{R''}.$$

Elevant au carré et ajoutant membre à membre ces trois équations, on aura, en supposant R, R', R'' rectangulaires,

$$\frac{1}{a^4}x^2+\frac{1}{b^4}y^2+\frac{1}{c^4}z^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

ce qui fait voir que :

Le point d'intersection de trois plans tangens à un ellipsoïde aux extrémités de trois diamètres rectangulaires, se meut sur une surface du second degré concentrique à la proposée.

(7) « Le plan qui passe par les extrémités de trois diamètres rectangulaires roule sur une sphère. »

En effet, en ayant égard aux équations (e) du lemme, on trouve pour équation de ce plan

$$(RR'\alpha''+RR''\alpha'+R'R''\alpha)x+(RR'\beta''+RR''\beta'+R'R''\beta)y$$
$$+(RR'\gamma''+RR''\gamma'+R'R''\gamma)z=RR'R''.$$

La longueur de la perpendiculaire abaissée sur ce plan, du

centre de la surface, se réduit, en vertu des équations (a) et (b), à

$$\frac{RR'R''}{\sqrt{R^2R'^2+R^2R''^2+R'^2R''^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}. \quad (5)$$

Cette quantité est constante ; donc le plan roule sur la sphère qui l'a pour rayon et dont le centre est à l'origine.

(8) « La somme des carrés de trois diamètres conjugués est » constante. »

Car $$r^2+r'^2+r''^2 = a^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2) + b^2(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2) + c^2(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2) = a^2+b^2+c^2. \quad (c)$$

(9) « La somme des carrés des projections de trois diamètres » conjugués sur une droite fixe ; est constante. » (*)

En effet, en appelant δ, ε, φ les cosinus des angles qu'une droite D fait avec les trois axes des coordonnées, on aura :

$$r\cos\widehat{r,D} = a\alpha\delta + b\beta\varepsilon + c\gamma\varphi,$$
$$r'\cos\widehat{r',D} = a\alpha'\delta + b\beta'\varepsilon + c\gamma'\varphi,$$
$$r''\cos\widehat{r'',D} = a\alpha''\delta + b\beta''\varepsilon + c\gamma''\varphi;$$

d'où

$$r^2\cos^2\widehat{r,D}+r'^2\cos^2\widehat{r',D}+r''^2\cos^2\widehat{r'',D} = a^2\delta^2+b^2\varepsilon^2+c^2\varphi^2, \quad (c \text{ et } d)$$

$r\cos\widehat{r,D}$, $r'\cos\widehat{r',D}$, $r''\cos\widehat{r'',D}$ sont les projections des diamètres r, r', r'' sur la droite D; le second membre est une quantité constante; donc, etc.

Il suit de ce théorème et du précédent, que :

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de trois diamètres conjugués sur un diamètre fixe, est une quantité constante.

(10) « La somme des carrés des perpendiculaires abaissées » des extrémités de trois diamètres conjugués sur un plan fixe » passant par le centre de la surface, est constante. »

En effet, les perpendiculaires abaissées des extrémités des trois diamètres r, r', r'' sur le plan $Ax+By+Cz=0$, ont pour longueurs

$$\frac{Aa\alpha+Bb\beta+Cc\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{Aa\alpha'+Bb\beta'+Cc\gamma'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{Aa\alpha''+Bb\beta''+Cc\gamma''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

(*) Proposition démontrée page 258 du Traité des surfaces du second degré cité.

la somme des carrés de ces trois quantités est

$$\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}{A^2+B^2+C^2}. \qquad (c \text{ et } d)$$

Cette quantité est constante ; donc, etc.

Il suit de là et du théorème (8), que :

La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur un plan fixe, est une quantité constante.

(11) Le cosinus de l'angle des deux diamètres r, r' est

$$\cos \widehat{r,r'} = \frac{a^2\alpha\alpha'+b^2\beta\beta'+c^2\gamma\gamma'}{rr'},$$

d'où

$$r^2r'^2\sin^2\widehat{r,r'} = r^2r'^2-(a^2\alpha\alpha'+b^2\beta\beta'+c^2\gamma\gamma')^2$$
$$=(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)(a^2\alpha'^2+b^2\beta'^2+c^2\gamma'^2)-(a^2\alpha\alpha'+b^2\beta\beta'+c^2\gamma\gamma')^2$$
$$=a^2b^2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+a^2c^2(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2+b^2c^2(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2,$$

ou, en vertu des équations (e),

$$r^2r'^2\sin^2\widehat{r,r'} = a^2b^2\gamma''^2+a^2c^2\beta''^2+c^2b^2\alpha''^2$$
$$=a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}\alpha''^2+\frac{1}{b^2}\beta''^2+\frac{1}{c^2}\gamma''^2\right)=\frac{a^2b^2c^2}{R''^2}; \qquad (2)$$

d'où

$$rr'\sin\widehat{r,r'} = \frac{abc}{R''}, \qquad rr'\sin\widehat{r,r'}.R''=abc.$$

Or $rr'\sin\widehat{r,r'}$ est l'aire du parallélogramme construit sur les deux diamètres r, r' ; R'' est égal à la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'extrémité du diamètre r'' (3) ; donc $rr'\sin\widehat{r,r'}.R''$ représente le volume du parallélepipède construit sur r, r', r'' ; donc :

Le volume du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués est constant (*).

(12) L'on a les trois équations

$$rr'\sin\widehat{r,r'}=\frac{abc}{R''}, \quad rr''\sin\widehat{r,r''}=\frac{abc}{R'}, \quad r'r''\sin\widehat{r',r''}=\frac{abc}{R}. \qquad (11)$$

La somme des carrés de ces trois quantités est

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}\right)=a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right), \qquad (5)$$

ou

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2;$$

(*) *Voyez* pages 257 et 258 du Traité cité.

Donc :

La somme des carrés des faces du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués est une quantité constante.

(13) Ayant construit un parallèlepipède sur trois diamètres conjugués, la somme des carrés des projections des faces de ce parallélepipède sur un plan fixe, est une quantité constante.

En effet, le plan passant par les deux diamètres r, r' a pour équation

$$ab(\alpha\beta'-\alpha'\beta)z+ac(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')y+bc(\beta\gamma'-\gamma\beta')x=0,$$

ou

$$ab\gamma''z+ac\beta''y+bc\alpha''x=0. \qquad (e)$$

Le cosinus de l'angle qu'il fait avec le plan

$$Lx+My+Nz=k$$

est, en observant que $rr'\sin\widehat{r,r'}=\sqrt{a^2b^2\gamma''^2+a^2c^2\beta''^2+b^2c^2\alpha''^2}$ (11),

$$\frac{Lbc\alpha''+Mac\beta''+Nab\gamma''}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}\;rr'\sin\widehat{r,r'}};$$

l'aire de la projection du parallélogramme $rr'\sin\widehat{r,r'}$ sur le plan que nous considerons, est donc

$$\frac{Lbc\alpha''+Mac\beta''+Nab\gamma''}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

Les aires des projections des parallélogrammes $rr''\sin\widehat{r,r''}$, $r'r''\sin\widehat{r',r''}$, sur le même plan, sont semblablement

$$\frac{Lbc\alpha'+Mac\beta'+Nab\gamma'}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},\qquad \frac{Lbc\alpha+Mac\beta+Nab\gamma}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

La somme des carrés de ces trois projections est égale à

$$\frac{L^2b^2c^2+M^2a^2c^2+N^2a^2b^2}{L^2+M^2+N^2}. \qquad (c \text{ et } d)$$

Cette quantité est constante; donc, etc.

(14) « Si l'on projette trois diamètres conjugués sur un » plan diamétral, qu'on construise trois parallélepipèdes dont » chacun ait pour arêtes contiguës un des diamètres et les

» projections des deux autres ; la somme de leurs volumes sera
» constamment égale à abc. »

En effet, l'aire de la projection du parallélogramme $r'r''\sin\widehat{r',r''}$, sur le plan qui a pour équation

$$Lx + My + Nz = 0,$$

est

$$\frac{Lbc\alpha + Mac\beta + Nab\gamma}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; \qquad (13)$$

la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diamètre r, sur ce plan, a pour longueur

$$\frac{La\alpha + Mb\beta + Nc\gamma}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

donc le parallélepipède construit sur r et les projections de r' et r'' a pour volume

$$\frac{(Lbc\alpha + Mac\beta + Nab\gamma)(La\alpha + Mb\beta + Nc\gamma)}{L^2 + M^2 + N^2}$$
$$= \frac{abc(L^2\alpha^2 + M^2\beta^2 + N^2\gamma^2)}{L^2 + M^2 + N^2}$$
$$+ \frac{LM(a^2+b^2)c\alpha\beta + LN(a^2+c^2)b\alpha\gamma + MN(b^2+c^2)a\beta\gamma}{L^2 + M^2 + N^2}.$$

On aura semblablement les volumes des deux autres parallélepipèdes construits, l'un sur r' et les projections de r et r'', et l'autre sur r'' et les projections de r et r' ; l'on voit que leur somme se réduit à abc, en vertu des équations (c) et (d) du lemme. Donc, etc.

On prouverait facilement que :

« Si l'on projette trois diamètres conjugués sur une droite qui
» passe par le centre de la surface, et qu'on forme trois pa-
» rallélepipèdes dont chacun ait pour arêtes contiguës deux dia-
» mètres et la projection du troisième, leur somme sera égale
» à abc. »

(15) « Si l'on a six diamètres dont trois soient conjugués et
» les trois autres également conjugués entr'eux, le volume du pa-
» rallélepipède construit sur trois quelconques de ces diamètres
» sera égal à celui du parallélepipède construit sur les trois autres. »

En effet, le plan passant par les deux diamètres r', r'' a pour équation

$$bc\alpha x + ac\beta y + ab\gamma z = 0; \qquad (13)$$

le sinus de l'angle qu'il fait avec le diamètre ι, dont l'extrémité a pour coordonnées $x=a\xi$, $y=b\nu$, $z=c\zeta$, ξ, ν, ζ étant les cosinus des angles qu'un diamètre ρ fait avec les trois axes coordonnés, est

$$\sin(\iota, r'r'') = \frac{abc(\xi\alpha+\nu\beta+\zeta\gamma)}{\iota . r'r''\sin \widehat{r',r''}} = \frac{abc\cos\widehat{R,\rho}}{\iota . r'r''\sin\widehat{r',r''}};$$

d'où

$$r'r''\sin\widehat{r',r''}\times\iota.\sin(\iota, r'r'') = abc\cos\widehat{R,\rho}.$$

Le premier membre est le volume du parallélepipède construit sur r', r'' et ι : si ι est conjugué de r' et r'', ρ se confondra avec R ; on aura $\cos\widehat{R,\rho}=1$, et ce volume se réduira à abc, comme nous l'avons déjà trouvé (11).

Il est clair qu'on obtiendrait de même

$$\iota'\iota''\sin\widehat{\iota',\iota''}\times r.\sin(r, \iota'\iota'') = abc\cos\widehat{\rho, R},$$

ι', ι'' et ι étant trois diamètres conjugués; donc le volume du parallélepipède construit sur r', r'', ι est égal au volume du parallélepipède construit sur ι', ι'', r; donc, etc.

(16) « La somme des carrés des volumes des trois parallélepipèdes construits sur un diamètre quelconque ι, et sur deux
» des trois diamètres conjugués r, r', r'', est constamment égale
» à $a^2b^2c^2$. »

En effet, nous venons de trouver

$$r'r''\sin\widehat{r',r''}.\iota\sin(\iota, r'r'') = abc\cos\widehat{R,\rho};$$

on aura de même

$$rr''\sin\widehat{r,r''}..\iota\sin(\iota, rr'') = abc\cos\widehat{R',\rho},$$

$$rr'\sin\widehat{r,r'}..\iota\sin(\iota, rr') = abc\cos\widehat{R'',\rho};$$

élevant ces trois équations au carré, et les ajoutant membre à membre, on aura pour somme

$$a^2b^2c^2(\cos^2\widehat{R,\rho}+\cos^2\widehat{R',\rho}+\cos^2\widehat{R'',\rho}) = a^2b^2c^2,$$

puisque R, R', R'' sont rectangulaires. Donc, etc.

(17) « Si l'on a deux diamètres fixes ι, ι', et trois diamètres
» conjugués r, r', r'', qu'on forme six parallélepipèdes dont trois
» aient ι, et les trois autres ι', pour arête commune, et deux
» des trois diamètres r, r', r'' pour autres arêtes contiguës; la

» somme des produits, deux à deux, des parallélepipèdes qui ont
» deux des arétes r, r', r'' communes, est indépendante des dia-
» mètres r, r', r''. »

En effet, les volumes de ces six parallélepipèdes sont

$$r'r'' \sin \widehat{r',r''} . \iota \sin (\iota, r'r'') = abc \cos \widehat{R,\rho},$$

$$r'r'' \sin \widehat{r',r''} . \iota' \sin (\iota', r'r'') = abc \cos \widehat{R,\rho'},$$

$$rr'' \sin \widehat{r,r''} . \iota \sin (\iota, rr'') = abc \cos \widehat{R',\rho},$$

$$rr'' \sin \widehat{r,r''} . \iota' \sin (\iota', rr'') = abc \cos \widehat{R',\rho'},$$

$$rr' \sin \widehat{r,r'} . \iota \sin (\iota, rr') = abc \cos \widehat{R'',\rho},$$

$$rr' \sin \widehat{r,r'} . \iota' \sin (\iota', rr') = abc \cos \widehat{R'',\rho'}.$$

La somme des produits deux à deux de celles de ces quantités qui ne diffèrent que par ι et ι', est

$$a^2b^2c^2(\cos \widehat{R,\rho} . \cos \widehat{R,\rho'} + \cos \widehat{R',\rho} . \cos \widehat{R',\rho'} + \cos \widehat{R'',\rho} . \cos \widehat{R'',\rho'})$$

$$= a^2b^2c^2 \cos \widehat{\rho,\rho'},$$

puisque les trois diamètres de R, R', R'' sont supposés rectangulaires; cette quantité est indépendante de r, r', r''; donc, etc.

(18) En ayant égard aux équations (e) du lemme, on trouve que le plan qui passe par les extrémités des trois diamètres conjugués r, r', r'' a pour équation

$$bc(\alpha+\alpha'+\alpha'')x + ac(\beta+\beta'+\beta'')y + ab(\gamma+\gamma'+\gamma'')z = abc.$$

Le plan tangent à l'extrémité du diamètre d, qui dérive de $D(\delta, \epsilon, \varphi)$, de même que r dérive de R (2), a pour équation

$$bc\delta x + ac\epsilon y + ab\varphi z = abc;$$

pour que ces deux plans soient parallèles, il faut qu'on ait

$$n\delta = \alpha + \alpha' + \alpha'', \quad n\epsilon = \beta + \beta' + \beta'', \quad n\varphi = \gamma + \gamma' + \gamma'',$$

et à cause de $\delta^2 + \epsilon^2 + \varphi^2 = 1$, on voit que $n = \sqrt{3}$, de sorte que

$$\delta = \frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\sqrt{3}}, \quad \epsilon = \frac{\beta+\beta'+\beta''}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{\sqrt{3}}.$$

On peut remarquer que le diamètre D, qui fait avec les trois axes des x, y, z des angles dont les cosinus sont δ, ϵ, φ, fait des angles égaux avec les trois diamètres R, R', R''.

L'équation du plan qui passe par les extrémités de r, r', r'' se réduit à

$$bc\delta x + ac\iota y + ab\varphi z = \frac{abc}{\sqrt{3}};$$

la comparant à celle du plan tangent

$$bc\delta x + ac\iota y + ab\varphi z = abc,$$

on voit que :

Les distances du plan qui passe par les extrémités de trois diamètres conjugués et du plan tangent qui lui est parallèle, au centre de la surface, sont entr'elles dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(19) Le diamètre d, qui est conjugué du plan qui passe par les extrémités de r, r', r'', perce ce plan au centre de la courbe qu'il détermine dans la surface; la distance de ce point à l'origine est, d'après ce qui précède, $\frac{d}{\sqrt{3}}$; donc, *ce point est sur une surface semblable et concentrique à la proposée.*

(20) Le diamètre d a la direction de la diagonale du parallélepipède construit sur r, r', r''; car les coordonnées

$$x = a\delta\sqrt{3} = a(\alpha + \alpha' + \alpha''),$$
$$y = b\iota\sqrt{3} = b(6 + 6' + 6''),$$
$$z = c\varphi\sqrt{3} = c(\gamma + \gamma' + \gamma''),$$

appartiennent à un point situé sur ce diamètre, et elles satisfont aux trois équations

$$\frac{1}{a}\alpha x + \frac{1}{b}6y + \frac{1}{c}\gamma z = 1,$$
$$\frac{1}{a}\alpha' x + \frac{1}{b}6'y + \frac{1}{c}\gamma' z = 1,$$
$$\frac{1}{a}\alpha'' x + \frac{1}{b}6''y + \frac{1}{c}\gamma'' z = 1,$$

des plans tangens aux extrémités des diamètres r, r', r'', lesquelles représentent l'extrémité de la diagonale dont il s'agit. La longueur de cette diagonale est $d.\sqrt{3}$, ce qui fait voir que :

Le sommet du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués, engendre une surface semblable et concentrique à la proposée.

On obtient facilement l'équation de cette surface, en élevant au carré les trois équations précédentes, et les ajoutant membre à membre; le résultat est (*c* et *d*)

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2+\frac{1}{c^2}z^2=3.$$

(21) « Le triangle formé par les extrémités des trois dia-
» mètres conjugués r, r', r'', et le parallélogramme construit
» sur deux diamètres conjugués situés dans un plan parallèle à celui
» du triangle, sont entr'eux dans un rapport constant. »

En effet, le carré du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de *d* est

$$b^2c^2\delta^2+a^2c^2\varepsilon^2+a^2b^2\varphi^2=\frac{a^2b^2c^2}{D^2}. \qquad (11)$$

Or le parallélepipède construit sur r, r', r'' a pour volume

$$6.\Sigma.\tfrac{1}{3}\frac{D}{\sqrt{3}}=abc, \quad \text{ou} \quad 2\Sigma\frac{D}{\sqrt{3}}=abc,$$

Σ étant l'aire du triangle formé par les extrémités de r, r', r'', et $\frac{D}{\sqrt{3}}$ la perpendiculaire abaissée de l'origine sur son plan (18). Eliminant le produit *abc* entre cette équation et la précédente, on a

$$\Sigma^2=\tfrac{3}{4}(b^2c^2\delta^2+a^2c^2\varepsilon^2+a^2b^2\varphi^2); \quad \frac{\Sigma}{\sqrt{b^2c^2\delta^2+a^2c^2\varepsilon^2+a^2b^2\varphi^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

donc, etc.

L'expression de Σ peut se mettre sous la forme $\Sigma=\frac{abc}{D}\frac{\sqrt{3}}{2}$; pour deux autres parallélepipèdes, on aurait

$$\Sigma'=\frac{abc}{D'}\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Sigma''=\frac{abc}{D''}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il est facile de voir que *quand les plans des trois triangles* Σ, Σ', Σ'' *sont conjugués, la somme des carrés de leurs aires est une quantité constante;*

La somme des carrés de leurs projections sur un plan fixe, est également une quantité constante.

(22) « Si par le triangle formé par les extrémités de trois dia-
» mètres conjugués r, r', r'', on fait passer trois prismes dont
» les arêtes soient parallèles à trois autres diamètres conjugués

» ι, ι', ι'' respectivement, la somme des carrés des volumes
» qu'ils intercepteront dans le parallélepipède construit sur les
» diamètres 2ι, $2\iota'$, $2\iota''$ sera constamment égale à $3a^2b^2c^2$. »

En effet, l'équation du plan qui passe par les extrémités de r, r', r'' est

$$bc\delta x + ac\varepsilon y + ab\varphi z = \frac{abc}{\sqrt{3}}.$$

l'on sait que

$$\delta = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{\gamma + \gamma' + \gamma'}{\sqrt{3}}; \quad (18)$$

le sinus de l'angle que ce plan fait avec le diamètre ι, dont les coordonnées de l'extrémité sont $x = a\xi$, $y = b\nu$, $z = c\zeta$, est

$$(\sin \iota, \Sigma) = \frac{abc.(\xi\delta + \nu\varepsilon + \varphi\zeta)}{\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\nu^2 + c^2\zeta^2}\,\sqrt{b^2c^2\delta^2 + a^2c^2\varepsilon^2 + a^2b^2\varphi^2}},$$

$$(\sin \iota, \Sigma) = \frac{abc.\cos \widehat{D,\rho}}{\iota.\frac{2\Sigma}{\sqrt{3}}} = \frac{abc\sqrt{3}.\cos \widehat{D,\rho}}{2\iota.\Sigma}; \quad (20)$$

d'où

$$2\iota.\Sigma.\sin(\iota,\Sigma) = abc\sqrt{3}.\cos \widehat{D,\rho}.$$

On aura semblablement

$$2\iota'.\Sigma.\sin(\iota',\Sigma) = abc\sqrt{3}.\cos \widehat{D,\rho'},$$

$$2\iota''.\Sigma.\sin(\iota'',\Sigma) = abc\sqrt{3}.\cos \widehat{D,\rho''};$$

la somme des carrés de ces quantités est

$$[2\iota.\Sigma\sin(\iota,\Sigma)]^2 + [2\iota'.\Sigma\sin(\iota',\Sigma)]^2 + [2\iota''.\Sigma\sin(\iota'',\Sigma)]^2$$
$$= 3a^2b^2c^2(\cos^2\widehat{D,\rho} + \cos^2\widehat{D,\rho'} + \cos^2\widehat{D,\rho''}) = 3a^2b^2c^2,$$

puisque ι, ι', ι'' étant conjugués, ρ, ρ', ρ'' sont rectangulaires (4).

Or $[2\iota.\Sigma\sin(\iota,\Sigma)]$ est le volume du prisme qui passe par le triangle Σ, a ses arêtes parallèles au diamètre ι et est terminé aux plans tangens aux extrémités du diamètre 2ι; on voit semblablement ce qu'expriment les deux autres quantités; donc, etc.

(23) Si l'on projette sur le plan de deux droites fixes ι', ι'', par des droites toutes parallèles à leur diamètre conjugué ι, les trois faces du parallélepipède construit sur trois diamètres

conjugués quelconques, la somme des carrés des trois projections est une quantité constante.

En effet, l'on a

$$\sin(\imath,r'r'') = \frac{abc\cos\widehat{R,\rho}}{\imath.r'r''\sin\widehat{r'r''}}, \quad \sin(\imath,\imath'\imath'') = \frac{abc}{\imath.\imath'\imath''\sin\widehat{\imath',\imath''}}, \quad (15)$$

et par conséquent

$$r'r''\sin\widehat{r'r''}.\frac{\sin(\imath,r'r'')}{\sin(\imath,\imath'\imath'')} = \imath'\imath''\sin\widehat{\imath',\imath''}\cos\widehat{R,\rho};$$

l'on aura de même

$$rr''\sin\widehat{r,r''}.\frac{\sin(\imath,rr'')}{\sin(\imath,\imath'\imath'')} = \imath'\imath''\sin\widehat{\imath',\imath''}\cos\widehat{R',\rho},$$

$$rr'\sin\widehat{r,r'}.\frac{\sin(\imath,rr')}{\sin(\imath,\imath'\imath'')} = \imath'\imath''\sin\widehat{\imath',\imath''}\cos\widehat{R'',\rho}.$$

Les premiers membres de ces trois équations sont les projections des parallélogrammes $r'r''\sin\widehat{r',r''}$, $rr''\sin\widehat{r,r''}$, $rr'\sin\widehat{r,r'}$, sur le plan des deux diamètres $\imath'$, $\imath''$ par des droites parallèles à leur conjugué $\imath$; la somme des carrés de ces quantités est égale à $(\imath'\imath''\sin\widehat{\imath',\imath''})^2$, puisque R, R', R'' étant rectangulaires, on a $\cos^2\widehat{R,\rho}+\cos^2\widehat{R',\rho}+\cos^2\widehat{R'',\rho}=1$. Donc, etc.

(24) « Si l'on forme trois parallélepipèdes qui aient trois dia-
» mètres conjugués r, r', r'' pour diagonales respectivement et
» dont les arêtes soient parallèles à trois autres diamètres con-
» jugués $\imath$, $\imath'$, $\imath''$, la somme de leurs bases sur l'un des plans
» formés par ces derniers deux à deux, est égale à zéro. »

En effet, si par l'extrémité du diamètre r, on mène deux droites, la première parallèle au diamètre $\imath$, et terminée au plan de $\imath'$ et $\imath''$, la seconde parallèle à $\imath'$ et terminée au plan de $\imath$ et $\imath''$; elles seront égales à $\imath\cos\widehat{R,\rho}$, $\imath'\cos\widehat{R,\rho'}$ respectivement, ce dont il est facile de s'assurer; le parallélepipède qui a le diamètre r pour diagonale, et dont les arêtes sont parallèles à $\imath$, $\imath'$, $\imath''$, a donc pour expression de sa base sur le plan de $\imath$, $\imath'$,

$$\imath\imath'\sin\widehat{\imath,\imath'}\cos\widehat{R,\rho}\cos\widehat{R,\rho'}.$$

Les bases des deux autres parallélepipèdes sur le même plan seront

$$\imath\imath'\sin\widehat{\imath,\imath'}\cos\widehat{R',\rho}\cos\widehat{R',\rho'}, \qquad \imath\imath'\sin\widehat{\imath,\imath'}\cos\widehat{R'',\rho}\cos\widehat{R'',\rho'},$$

la somme de ces trois quantités est

$$ss'\sin\widehat{s,s'}\,(\cos\widehat{R,\rho}\cos\widehat{R,\rho'}+\cos\widehat{R',\rho}\cos\widehat{R',\rho'}+\cos\widehat{R'',\rho}\cos\widehat{R'',\rho'})$$

$$=ss'\sin\widehat{s,s'}\cos\widehat{\rho,\rho'}=0.$$

Donc, etc.

On doit regarder la base d'un des parallélepipèdes sur le plan de s et s', par exemple, comme positive quand elle est comprise dans l'angle des diamètres s, s', ou dans l'angle formé par leurs prolongemens, et comme négative quand elle est comprise entre un diamètre et le prolongement de l'autre.

(25) « Si, par le centre de l'ellipsoïde, on mène une droite » fixe, les plans tangens aux extrémités de trois diamètres con- » jugués quelconques la rencontreront en trois points tels que la » somme des carrés des valeurs inverses de leurs distances au » centre de la surface sera une quantité constante. »

En effet, soient ξ, ν, ζ les cosinus des angles que cette droite fixe fait avec les trois axes coordonnés, et l, m, n les distances de l'origine aux points où elle perce les trois plans tangens aux extrémités des diamètres r, r', r'', on aura

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{a}\xi\alpha+\frac{1}{b}\nu\beta+\frac{1}{c}\zeta\gamma,$$

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{a}\xi\alpha'+\frac{1}{b}\nu\beta'+\frac{1}{c}\zeta\gamma',$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}\xi\alpha''+\frac{1}{b}\nu\beta''+\frac{1}{c}\zeta\gamma''.$$

La somme des carrés de ces trois quantités est

$$\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{a^2}\xi^2+\frac{1}{b^2}\nu^2+\frac{1}{c^2}\zeta^2; \qquad (c \text{ et } d)$$

le second membre est une quantité constante; donc, etc.

(26) On démontrerait de même le théorème suivant :

« Si, par le centre de l'ellipsoïde, l'on mène deux droites » fixes, les traces des plans tangens aux extrémités de trois dia- » mètres conjugués, sur le plan de ces deux droites, formeront » avec elles trois triangles dont la somme des valeurs inverses » sera une quantité constante. »

(27) « Si l'on multiplie deux à deux et par le sinus de l'angle » qu'elles comprennent, les faces qui forment un angle trièdre

» du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués, la » somme des carrés des trois produits est une quantité cons- » tante. »

En effet, le volume du parallélepipède construit sur r, r', r'', est

$$rr'r''\sqrt{1-\cos^2\widehat{r,r'}-\cos^2\widehat{r,r''}-\cos^2\widehat{r',r''}+2\cos\widehat{r,r'}\cos\widehat{r,r''}\cos\widehat{r',r''}}=abc;$$

multipliant et divisant le premier membre par $r\sin\widehat{r,r'}\sin\widehat{r,r''}$, l'on a

$$rr'\sin\widehat{r,r'}\,.\,rr''\sin\widehat{r,r''}\,\frac{\sqrt{1-\cos^2\widehat{r,r'}-\text{etc.}}}{\sin\widehat{r,r'}\sin\widehat{r,r''}}=abcr,$$

ou bien

$$rr'\sin\widehat{r,r'}\,.\,rr''\sin\widehat{r,r''}\sin D=abcr;$$

en appelant D l'angle dièdre dont l'arête est r, l'on aura de même

$$r'r\sin\widehat{r',r}\,.\,r'r''\sin\widehat{r',r''}\sin D'=abcr',$$

$$r''r\sin\widehat{r'',r}\,.\,r''r'\sin\widehat{r'',r'}\sin D''=abcr'',$$

D', D'' étant les angles dièdres dont les arêtes sont r', r''; la somme des carrés de ces trois quantités est égale à

$$a^2b^2c^2(r^2+r'^2+r''^2)=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2);$$

donc, etc.

(28) « La somme des momens d'inertie d'un ellipsoïde, par » rapport à trois diamètres conjugués, multipliés par les carrés » de ces diamètres respectivement, est une quantité constante. »

En effet, les momens d'inertie de l'ellipsoïde, par rapport aux diamètres r, r', r'', sont

$$K=A\,\frac{a^2\alpha^2}{r^2}+B\,\frac{b^2\beta^2}{r^2}+C\,\frac{c^2\gamma^2}{r^2},$$

$$K'=A\,\frac{a^2\alpha'^2}{r'^2}+B\,\frac{b^2\beta'^2}{r'^2}+C\,\frac{c^2\gamma'^2}{r'^2},$$

$$K''=A\,\frac{a^2\alpha''^2}{r''^2}+B\,\frac{b^2\beta''^2}{r''^2}+C\,\frac{c^2\gamma''^2}{r''^2},$$

et l'on a $A=\frac{M}{5}(c^2+b^2)$, $B=\frac{M}{5}(c^2+a^2)$, $C=\frac{M}{5}(a^2+b^2)$, M étant la masse de l'ellipsoïde (Mécanique de M. Poisson,

tome II, page 81). D'après les équations (c) du lemme, il vient

$$Kr^2 + K'r'^2 + K''r''^2 = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2$$

$$= \frac{M}{5}\left[a^2(c^2+b^2) + b^2(a^2+c^2) + c^2(a^2+b^2)\right]$$

$$= \frac{2.M}{5}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\ ;$$

cette quantité est constante. Donc, etc.

(29) « Si deux courbes S, S' sont tracées dans le plan Σ » qui passe par les extrémités de trois diamètres conjugués, » qu'on les projette, par des droites parallèles à ces diamètres, » sur les plans qu'ils forment deux à deux, et qu'on conçoive » six pyramides qui aient pour bases ces projections, et pour » sommet commun un point quelconque de la surface, la somme » des produits deux à deux de celles de ces pyramides dont » les bases sont sur le même plan, est égale au produit des » deux pyramides qui ont pour bases les deux courbes S, S', » et pour sommet commun le centre de la surface. »

En effet, soient r, r', r'' les trois diamètres conjugués; la projection de la courbe S sur le plan de r' et r'' est $S\,\frac{\sin(r,\Sigma)}{\sin(r,r'r'')}$; la pyramide qui a cette projection pour base, et l'extrémité du diamètre ɹ pour sommet, a pour volume $\frac{S}{3}\,\frac{\sin(r,\Sigma)}{\sin(r,r'r'')}\,\text{ɹ}.\sin(\text{ɹ},r'r'')$;

or $\text{ɹ}\sin(\text{ɹ},r'r'') = \frac{abc\cos\widehat{R,\rho}}{r'r''\sin\widehat{r',r''}}$, (15), et $r\,\sin(r,r'r'') = \frac{abc}{r'r''\sin\widehat{r',r''}}$;

l'expression du volume devient $\frac{S}{3}\,r\,.\sin(r,\Sigma)\cos\widehat{R,\rho}$, ou $\frac{S}{3}\,K.\cos\widehat{R,\rho}$, en désignant par K la distance du plan Σ au centre de la surface. La pyramide qui a pour base la projection de S' sur le même plan $r'r''$, aura de même pour volume $\frac{S'}{3}\,K\cos\widehat{R,\rho}$; le produit de ces volumes est $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}\cos^2\widehat{R,\rho}$; les deux autres produits semblables seront, d'après cela, $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}\cos^2\widehat{R',\rho}$, $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}\cos^2\widehat{R'',\rho}$. La somme de ces trois produits est $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}(\cos^2\widehat{R,\rho} + \cos^2\widehat{R',\rho} + \cos^2\widehat{R'',\rho}) = \frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}$, puisque les trois diamètres R, R', R'' sont rectangulaires, résultat qui démontre le théorème énoncé.

En voici une seconde démonstration.

L'ellipsoïde rapporté à ses trois diamètres conjugués r, r', r'' a pour équation

$$\frac{X^2}{r^2}+\frac{Y^2}{r'^2}+\frac{Z^2}{r''^2}=1\text{, ou}$$

$$X^2\sin^2(r,\Sigma)+Y^2\sin^2(r',\Sigma)+Z^2\sin^2(r'',\Sigma)=K^2,$$

en appelant K la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan Σ qui passe par les extrémités de r, r', r''.

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$X^2\sin^2(r,r'r'')\cdot\frac{SS'}{3.3}\cdot\frac{\sin^2(r,\Sigma)}{\sin^2(r,r'r'')}+Y^2\sin^2(r',rr'')\cdot\frac{SS'}{3.3}\cdot\frac{\sin^2(r',\Sigma)}{\sin^2(r',rr'')}$$

$$+Z^2\sin^2(r'',rr')\cdot\frac{SS'}{3.3}\cdot\frac{\sin^2(r'',\Sigma)}{\sin^2(r'',rr')}=\frac{SK}{3}\cdot\frac{S'K}{3},$$

dont l'inspection conduit à l'énoncé de la proposition.

Il est facile de voir que ce théorème et cette seconde démonstration s'appliquent à un nombre m de courbes situées dans le plan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, pourvu que le sommet commun des $3m$ pyramides qui ont pour bases les projections de ces courbes sur les trois plans coordonnés, soit sur la surface

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}+\frac{z^m}{c^m}=1.$$

Le théorème du n° 16 est un cas particulier du précédent.

(30) « Les propriétés du parallélepipède construit sur trois » diamètres conjugués appartiennent au parallélepipède qui a » ses arètes dirigées suivant les perpendiculaires abaissées du » centre de la surface sur les faces du premier, et égales aux » valeurs inverses de ces perpendiculaires. »

Cet énoncé renferme plusieurs théorèmes auxquels il serait facile d'appliquer des démonstrations semblables aux précédentes; mais en voici une qui est générale ; elle consiste à observer que si sur la perpendiculaire p abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'extrémité du diamètre r, on prend une partie égale à sa valeur inverse, c'est-à-dire à $\frac{1}{p}$, on aura un diamètre de la surface $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, qui se déduira de la droite R, par rapport à cette surface, de la même manière que r s'est déduit de R dans la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Les trois perpendiculaires p, p', p'' abaissées de l'origine sur les faces du parallélepipède construit sur r, r', r'' sont donc dirigées suivant les trois diamètres de la surface $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, qu'on déduit des trois droites R, R', R''; et leurs valeurs inverses $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ sont égales à ces diamètres, lesquels sont conjugués quand R, R', R'' sont rectangulaires. Ainsi les droites $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ sont trois diamètres conjugués de la surface $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, en même tems que r, r', r'' sont des diamètres conjugués de la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, ce qui démontre le théorème énoncé.

(31) Quand les trois diamètres $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ sont rectangulaires, la somme des carrés de leurs valeurs inverses est constante, c'est-à-dire que $p^2+p'^2+p''^2=a^2+b^2+c^2$ (5); il suit de là que :

Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangens à la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, *se meut sur la sphère* $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$ (*).

Car le carré de la distance du point d'intersection de ces trois plans à l'origine est $p^2+p'^2+p''^2=a^2+b^2+c^2$.

On peut démontrer ce théorème en observant que les conditions pour que les trois plans tangens aux extrémités des diamètres r, r', r'' soient rectangulaires, expriment que les trois diamètres R, R', R'' sont conjugués; que par conséquent la somme de leurs carrés est $a^2+b^2+c^2$ (8); or $R=p$, $R'=p'$, $R''=p''$ (3); donc $p^2+p'^2+p''^2=a^2+b^2+c^2$; donc *le point d'intersection*, etc.

(32) En voici une troisième démonstration.

Soit r_1 la longueur du diamètre qui dérive de r, de la même manière que nous avons déduit r de R (2); les coordonnées de l'extrémité de ce diamètre seront $x=\frac{a^2\alpha}{r}$, $y=\frac{b^2\beta}{r}$, $z=\frac{c^2\gamma}{r}$, et le plan tangent à l'ellipsoïde, en ce point, aura pour équation $\alpha x+\beta y+\gamma z=r$.

(*) Ce théorème, donné par M. Monge, a été démontré par M. Poisson, premier volume de la Correspondance, page 240, et Traité des Surfaces du second degré, page 234.

Ce plan est perpendiculaire au diamètre R, comme il est facile de le voir ; sa distance à l'origine est r ; donc si l'on a trois plans tangens à l'ellipsoïde et perpendiculaires aux trois droites rectangulaires R, R', R'' respectivement, leurs distances à l'origine seront r, r', r'', dont la somme des carrés est $a^2 + b^2 + c^2$; donc *le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangens à un ellipsoïde se meut sur une sphère.*

On peut trouver l'équation de cette sphère sans chercher son rayon ; car les équations des trois plans tangens sont

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = r',$$
$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = r''.$$

Les élevant au carré et les ajoutant membre à membre, en ayant égard aux équations (c) et (d), on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

équation de la sphère sur laquelle se meut le point d'intersection des trois plans.

(33) Le carré de la longueur du diamètre r_1 est

$$r_1^2 = \frac{a^4\alpha^2 + b^4\beta^2 + c^4\gamma^2}{r^2};$$

d'où

$$r^2 r_1^2 = a^4\alpha^2 + b^4\beta^2 + c^4\gamma^2;$$

on aura de même

$$r'^2 r_1'^2 = a^4\alpha'^2 + b^4\beta'^2 + c^4\gamma'^2,$$
$$r''^2 r_1''^2 = a^4\alpha''^2 + b^4\beta''^2 + c^4\gamma''^2,$$

en appelant r_1', r_1'' les dérivés de r', r''.

La somme de ces trois quantités est

$$r^2 r_1^2 + r'^2 r_1'^2 + r''^2 r_1''^2 = a^4 + b^4 + c^4,$$

c'est-à-dire que *si l'on a trois diamètres conjugués et qu'on multiplie chacun d'eux par son dérivé, la somme des carrés des produits sera une quantité constante.*

Ou bien :

Si l'on a trois diamètres et qu'on multiplie chacun d'eux par la distance du centre de la surface au plan tangent à son extrémité, la somme des carrés des produits sera une quantité constante, quand les trois plans tangens seront rectangulaires.

(34) Soit $_{\scriptscriptstyle 1}R$ le diamètre d'où dérive R, de la même manière que r dérive de R; les cosinus des angles qu'il fait avec les axes seront $\frac{R\alpha}{a}$, $\frac{R\beta}{b}$, $\frac{R\gamma}{c}$; son extrémité aura pour coordonnées $x=\frac{_{\scriptscriptstyle 1}RR\alpha}{a}$, $y=\frac{_{\scriptscriptstyle 1}RR\beta}{b}$, $z=\frac{_{\scriptscriptstyle 1}RR\gamma}{c}$; les substituant dans l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, on aura

$$\frac{1}{_{\scriptscriptstyle 1}R^2R^2}=\frac{1}{a^4}\alpha^2+\frac{1}{b^4}\beta^2+\frac{1}{c^4}\gamma^2;$$

on aura de même

$$\frac{1}{_{\scriptscriptstyle 1}R'^2R'^2}=\frac{1}{a^4}\alpha'^2+\frac{1}{b^4}\beta'^2+\frac{1}{c^4}\gamma'^2,$$

$$\frac{1}{_{\scriptscriptstyle 1}R''^2R''^2}=\frac{1}{a^4}\alpha''^2+\frac{1}{b^4}\beta''^2+\frac{1}{c^4}\gamma''^2.$$

La somme de ces trois quantités est

$$\frac{1}{_{\scriptscriptstyle 1}R^2R^2}+\frac{1}{_{\scriptscriptstyle 1}R'^2R'^2}+\frac{1}{_{\scriptscriptstyle 1}R''^2R''^2}=\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4},$$

c'est-à-dire que

Si l'on a trois diamètres et qu'on multiplie chacun d'eux par son dérivé, la somme des carrés des valeurs inverses des produits sera une quantité constante, quand ces trois dérivés seront rectangulaires.

Ou bien, en observant que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'extrémité de r a la direction de $_{\scriptscriptstyle 1}R$ et la longueur de R (32), on aura ce théorème :

Si du centre de l'ellipsoïde on abaisse trois perpendiculaires sur les faces du paraléllepipède construit sur trois diamètres conjugués, qu'on fasse le produit de chaque perpendiculaire par le diamètre de la surface dirigé suivant elle, la somme des carrés des valeurs inverses de ces trois produits sera une quantité constante.

(35) Appelons r_2 le diamètre qu'on déduit de r_1, de la même manière que r_1 se déduit de r; soit r_3 le diamètre qui se déduira semblablement de r_2; etc.

Le diamètre r_1 fait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont $\frac{a^2\alpha}{rr_1}$, $\frac{b^2\beta}{rr_1}$, $\frac{c^2\gamma}{rr_1}$; si l'on prend sur ce diamètre une partie égale à $\mu=\overline{rr_1}$, son extrémité sera sur la

surface ayant pour équation $\frac{1}{a^4}x^2+\frac{1}{b^4}y^2+\frac{1}{c^4}z^2=1$; ce diamètre μ est, comme on voit, le dérivé de R par rapport à cette surface. Les dérivés de R', R'' sont semblablement $\mu'=\overline{r'r'_1}$, $\mu''=\overline{r''r''_1}$, et dirigés suivant r'_1, r''_1 respectivement. Ces diamètres μ, μ', μ'' seront conjugués quand R, R', R'' seront rectangulaires (4). Tout ce que nous avons dit des diamètres conjugués s'appliquera à μ, μ', μ''.

On verrait de même que les trois axes $\pi=\overline{rr_1r_2}$, $\pi'=\overline{r'r'_1r'_2}$, $\pi''=\overline{r''r''_1r''_2}$, dirigés suivant r_2, r'_2, r''_2, sont des diamètres conjugués de la surface $\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}=1$, quand R, R', R'' sont rectangulaires; ainsi

$$r^2r_1^2r_2^2+r'^2r_1'^2r_2'^2+r''^2r_1''^2r_2''^2=a^6+b^6+c^6;\ \text{etc., etc.}$$

(36) Les plans tangens aux extrémités des diamètres r_2, r'_2, r''_2 sont perpendiculaires aux diamètres r, r', r'' (32); leurs équations sont :

$$\begin{aligned} a\alpha x+b\beta y+c\gamma z&=rr_1,\\ a\alpha' x+b\beta' y+c\gamma' z&=r'r'_1,\\ a\alpha'' x+b\beta'' y+c\gamma'' z&=r''r''_1; \end{aligned}$$

la somme de leurs carrés est

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=a^4+b^4+c^4;$$

donc *le point d'intersection de trois plans tangens à un ellipsoïde et perpendiculaires à trois diamètres conjugués, se meut sur un ellipsoïde concentrique au proposé.*

(37) Les plans tangens aux extrémités des trois diamètres r_3, r'_3, r''_3, ont pour équations

$$\begin{aligned} a^2\alpha x+b^2\beta y+c^2\gamma z&=rr_1r_2,\\ a^2\alpha' x+b^2\beta' y+c^2\gamma' z&=r'r'_1r'_2,\\ a^2\alpha'' x+b^2\beta'' y+c^2\gamma'' z&=r''r''_1r''_2, \end{aligned}$$

dont la somme des carrés est

$$a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2=a^6+b^6+c^6;$$

or ces trois plans sont perpendiculaires aux diamètres r_1, r'_1, r''_1 (32); donc :

Si après avoir mené trois plans rectangulaires tangens à un

ellipsoïde, on tire trois diamètres qui aboutissent à leurs points de contact, et qu'on mène trois plans tangens perpendiculaires à ces diamètres, leur point d'intersection se mouvra sur un ellipsoïde concentrique au proposé.

(38) L'on a $r^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$, ce qui exprime que le carré de r est égal à la somme des carrés des projections des trois rayons a, b, c dirigés suivant R, sur les axes des x, y, z respectivement.

Nous avons trouvé (11)

$$r^2r'^2 \sin^2 \widehat{r,r'} = a^2b^2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 + a^2c^2(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)^2 + b^2c^2(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2;$$

or il est facile de s'assurer que $(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = \sin \widehat{R,R'} \cos(RR', xy)$,

$$(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) = \sin \widehat{R,R'} \cos(RR', xz),\ (\beta\gamma' - \beta'\gamma) = \sin \widehat{R,R'} \cos(RR', zy);$$

il vient donc

$$r^2r'^2 \sin^2 \widehat{r,r'} = a^2b^2 \sin^2 \widehat{R,R'} \cos^2(RR', xy) + a^2c^2 \sin^2 \widehat{R,R'} \cos^2(RR', xz) + b^2c^2 \sin^2 \widehat{R,R'} \cos^2(RR', zy);$$

d'où l'on conclut que si l'on projette sur les plans xy, xz, yz les trois triangles formés par les rayons a et b, a et c, b et c, respectivement, ces rayons étant dirigés suivant R et R', la somme des carrés des trois projections est égale au carré du triangle formé par r et r'.

(39) « Le parallélepipède construit sur trois diamètres quelconques r, r', r'', est égal en volume au parallélepipède construit sur les trois axes a, b, c dirigés suivant les diamètres R, R', R''. »

En effet, le carré du volume du parallélepipède construit sur r, r', r'' est

$$\begin{aligned} P^2 = {} & r^2r'^2r''^2[1 - \cos^2 \widehat{r,r'} - \cos^2 \widehat{r,r''} - \cos^2 \widehat{r',r''} + 2\cos \widehat{r,r'} \cos \widehat{r,r''} \cos \widehat{r',r''}] \\ = {} & [(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)(a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2)(a^2\alpha''^2 + b^2\beta''^2 + c^2\gamma''^2) \\ & - (a^2\alpha''^2 + b^2\beta''^2 + c^2\gamma''^2)(a^2\alpha\alpha' + b^2\beta\beta' + c^2\gamma\gamma')^2 \\ & - (a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2)(a^2\alpha\alpha'' + b^2\beta\beta'' + c^2\gamma\gamma'')^2 \\ & - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)(a^2\alpha'\alpha'' + b^2\beta'\beta'' + c^2\gamma'\gamma'')^2 \\ & + 2(a^2\alpha\alpha' + b^2\beta\beta' + c^2\gamma\gamma')(a^2\alpha\alpha'' + b^2\beta\beta'' + c^2\gamma\gamma'')(a^2\alpha'\alpha'' + b^2\beta'\beta'' + c^2\gamma'\gamma'')]. \end{aligned}$$

Développant les différens termes de cette expression, on trouve que les coefficiens de a^6, b^6, c^6, a^4b^2, etc. sont nuls ; il ne reste que le terme en $a^2b^2c^2$ qui peut être mis sous la forme :

$$P^2 = a^2b^2c^2[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)$$
$$-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2-(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')^2$$
$$-(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2+\ldots\ldots\ldots$$
$$+2(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')]\,;$$

or on a $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$, $\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\cos\widehat{R,R'}$, $\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=\cos\widehat{R,R''}$ et $\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=\cos\widehat{R',R''}$; ainsi

$$P^2 = a^2b^2c^2\,[1-\cos^2\widehat{R,R'}-\cos^2\widehat{R,R''}-\cos^2\widehat{R',R''}$$
$$+2\cos\widehat{R',R}\cos\widehat{R'',R}\cos\widehat{R'',R'}]\,,$$

équation qui démontre le théorème énoncé.

Si r, r', r'' sont conjugués, R, R', R'' seront rectangulaires; alors on aura $P^2=a^2b^2c^2$, $P=abc$, comme nous l'avons trouvé (11).

Le carré du volume du parallélepipède construit sur r', r'' et ρ sera, en supposant r', r'' conjugués, c'est-à-dire R', R'' rectangulaires,

$$V^2=a^2b^2c^2(1-\cos^2\widehat{R',\rho}-\cos^2\widehat{R'',\rho})=a^2b^2c^2\cos^2\widehat{R,\rho}\,;$$

car $\cos^2\widehat{R,\rho}+\cos^2\widehat{R',\rho}+\cos^2\widehat{R'',\rho}=1$, puisque R, R', R'' sont rectangulaires; ainsi $V=abc\cos\widehat{R,\rho}$; il est clair qu'on trouverait la même expression pour le parallélepipède construit sur ρ', ρ'' et r, d'où suit le théorème du n° 15.

Cubature de l'ellipsoïde.

(40) Nous avons vu que la pyramide formée par les trois diamètres r, r', r'' a même volume que celle qui a pour arêtes les trois axes a, b, c dirigés suivant R, R', R''; celle-ci est égale en volume à celle qui aurait ses arêtes également dirigées suivant R, R', R'', mais toutes trois égales à $\theta=\sqrt[3]{abc}$. Or si l'on suppose les trois diamètres r, r', r'' infiniment rapprochés l'un de l'autre, de manière que la pyramide qu'ils forment puisse être regardée comme un élément de l'ellipsoïde, l'autre pyramide en sera un de la sphère qui a même centre que l'ellipsoïde et θ pour rayon. Cette sphère est donc telle qu'un de ses élémens a son égal dans l'ellipsoïde, et réciproquement. Donc la somme des élémens de la sphère est égale à la somme des élémens de l'ellipsoïde; donc cet ellipsoïde a pour expression de son volume $\frac{4}{3}\pi\theta^3=\frac{4}{3}\pi abc$.

Application à l'ellipsoïde de différentes propriétés de la sphère.

Concevons une surface rapportée à trois plans rectangulaires; déformons-la de manière que les coordonnées x, y, z d'un de ses points deviennent $X=\frac{a}{\theta}x$, $Y=\frac{b}{\theta}y$, $Z=\frac{c}{\theta}z$, a, b, c et θ étant trois quantités constantes. L'on formera ainsi une nouvelle surface qui sera du même degré que la proposée, puisque l'on a $x=\frac{\theta}{a}X$, $y=\frac{\theta}{b}Y$, $z=\frac{\theta}{c}Z$; nous appellerons cette nouvelle surface *dérivée* de la première.

Cette transformation donne le moyen d'appliquer à une surface des théorèmes qu'on sait appartenir à une autre surface du même degré.

Soit, par exemple, la sphère qui a pour équation

$$x^2+y^2+z^2=\theta^2;$$

sa dérivée sera la surface de l'ellipsoïde représenté par

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1.$$

La courbe dérivée d'un cercle de la sphère sera une courbe plane; la surface dérivée d'un cône tangent à la sphère sera un cône tangent à l'ellipsoïde; donc *la courbe de contact d'un cône et d'un ellipsoïde est une courbe plane.*

Par deux cercles d'une sphère on peut faire passer deux cônes; donc *par deux courbes planes d'un ellipsoïde on peut faire passer deux cônes.*

La courbe dérivée d'un grand cercle de la sphère est située dans un plan diamétral de l'ellipsoïde, par conséquent plusieurs des théorèmes de la théorie des transversales sphériques s'appliquent à des courbes tracées sur la surface d'un ellipsoïde, dans des plans passant par son centre.

Toutes les sphères ont pour dérivées des surfaces semblables et semblablement placées entr'elles.

Car soit

$$(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=i^2$$

l'équation d'une sphère; celle de sa dérivée sera

$$\left(\frac{\theta}{a}X-l\right)^2+\left(\frac{\theta}{b}Y-m\right)^2+\left(\frac{\theta}{c}Z-n\right)^2=i^2,$$

ou

$$\frac{1}{a^2}\left(X-\frac{al}{\theta}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(Y-\frac{bm}{\theta}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(Z-\frac{cn}{\theta}\right)^2=\frac{i^2}{\theta^2},$$

et l'on voit que cette surface est semblable à celle qui a pour équation

$$\frac{1}{a^2}X^2+\frac{1}{b^2}Y^2+\frac{1}{c^2}Z^2=1.$$

Son centre, dont les coordonnées sont $\frac{a}{\theta}l$, $\frac{b}{\theta}m$, $\frac{c}{\theta}n$, est le point dérivé du centre de la sphère $(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=i^2$.

D'après cela, les théorèmes relatifs aux contacts des sphères ont lieu pour des ellipsoïdes semblables et semblablement placés.

Ainsi le centre d'un ellipsoïde s. et s. p. (semblable et semblablement placé), et tangent à deux autres, se meut sur une surface du second degré.

Le centre d'un ellipsoïde s., s. p. et tangent à trois autres, se meut sur une courbe du second degré.

La suite des points de contact de cet ellipsoïde et de l'un des trois autres, est une courbe plane;

Etc., etc.

Mais il n'est pas nécessaire de démontrer d'abord pour des sphères tous ces théorèmes, pour ensuite les appliquer, ainsi que nous venons de le faire, aux ellipsoïdes; il est facile de les démontrer généralement pour des surfaces du second degré ss. et s. ps., soit par l'analyse, soit en ne posant aucune équation.

Le même mode de transformation peut aussi servir pour résoudre des problèmes de Géométrie descriptive.

Il sera facile, par exemple, de trouver, avec la ligne droite et le cercle, les points d'intersection d'une droite et d'un ellipsoïde dont on connaîtra les six sommets; de mener par une droite un plan tangent à cet ellipsoïde, etc.

Une propriété importante de notre système de transformation est que

« Le volume d'un corps quelconque est le même que celui » de son dérivé, quand $\theta=\sqrt[3]{abc}$. »

Pour le prouver, prenons d'abord une pyramide triangulaire située d'une manière quelconque par rapport aux trois plans coordonnés; l'expression de son volume se compose, comme on sait, d'une suite de produits de trois facteurs qui sont des coordonnées des sommets de la pyramide; et les coordonnées de

chaque facteur sont différentes, c'est-à-dire sont dirigées, l'une suivant l'axe des x, l'autre suivant l'axe des y, et la troisième suivant l'axe des z; (*) par conséquent la pyramide dérivée aura pour volume la même expression multipliée par $\frac{abc}{\theta^3}$; mais je suppose que $\theta^3 = abc$; donc les deux pyramides auront même volume.

Or tout corps peut être regardé comme composé d'une infinité de pyramides triangulaires infiniment petites qui auront toutes leurs égales en volume dans son dérivé; donc le théorème est démontré.

Il suit de là qu'une portion quelconque de l'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ aura même volume qu'une portion correspondante de la sphère $x^2+y^2+z^2=(\sqrt[3]{abc})^2$, et que par conséquent l'ellipsoïde aura pour volume $\frac{4}{3}\pi abc$.

Il suit aussi de ce qui précède que quand le sommet d'un cône tangent à un ellipsoïde se meut sur la surface d'un ellipsoïde s., s. p. et concentrique au premier,

1°. Le volume compris entre la surface du cône et celle de l'ellipsoïde, depuis le sommet jusqu'à la courbe de contact, est constamment le même;

2°. Le volume du segment déterminé dans l'ellipsoïde par le plan de la courbe de contact du cône, est toujours le même;

3°. Le volume du secteur semblablement déterminé reste également le même;

Etc., etc.

Démonstration des théorèmes sur les surfaces du second degré, énoncés par M. Monge, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, tom. II, p. 319; par M. Chasles.

(1) « Lorsque deux surfaces quelconques du second degré » sont concentriques, il y a toujours dans chacune d'elles trois » diamètres conjugués dont les directions sont les mêmes que » celles de trois diamètres conjugués considérés dans l'autre. »

En effet, supposons les deux surfaces rapportées à trois axes qui soient les diamètres conjugués rectangulaires de la première; elles auront pour équations

(*) Journal de l'Ecole Polytechnique, 15e cahier, page 97.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2D'yz + 2E'xz + 2F'xy = 1.$$

Menons par l'origine trois nouveaux axes ox', oy', oz', dont les équations soient

$$\left.\begin{matrix} x = az \\ y = bz \end{matrix}\right\} \text{pour le } 1^{\text{er}}, \quad \left.\begin{matrix} x = a'z \\ y = b'z \end{matrix}\right\} \text{pour le } 2^{\text{e}}, \text{ et } \left.\begin{matrix} x = a''z \\ y = b''z \end{matrix}\right\} \text{pour le } 3^{\text{e}};$$

les formules qui serviront à passer du système d'axes rectangulaires ox, oy, oz, aux axes obliques ox', oy', oz', seront : (Traité des Surfaces du second degré, par M. Hachette, p. 120.)

$$x = \frac{ax'}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + \frac{a'y'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}} + \frac{a''z'}{\sqrt{a''^2+b''^2+1}},$$
$$y = \frac{bx'}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + \frac{b'y'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}} + \frac{b''z'}{\sqrt{a''^2+b''^2+1}},$$
$$z = \frac{x'}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + \frac{y'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}} + \frac{z'}{\sqrt{a''^2+b''^2+1}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans les équations des deux surfaces, et qu'on égale à zéro les coefficiens des termes en $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$, pour exprimer que les trois axes ox', oy', oz' sont, dans chacune des surfaces, trois diamètres conjugués, on aura les six équations......(A)

$$\left\{\begin{aligned} &Aaa' + Bbb' + C = 0, \\ &Aaa'' + Bbb'' + C = 0, \\ &Aa'a'' + Bb'b'' + C = 0, \\ &A'aa' + B'bb' + C' + D'(b+b') + E'(a+a') + F'(ab'+ba') = 0, \\ &A'aa'' + B'bb'' + C' + D'(b+b'') + E'(a+a'') + F'(ab''+ba'') = 0, \\ &A'a'a'' + B'b'b'' + C' + D'(b'+b'') + E'(a'+a'') + F'(a'b''+b'a'') = 0, \end{aligned}\right.$$

lesquelles donneront les valeurs des six inconnues a, b, a', b', a'', b''.

Multiplions la première par a'', et la seconde par a', et retranchons-les l'une de l'autre; puis multiplions la première par b'' et la deuxième par b', et retranchons-les encore l'une de l'autre; nous aurons les deux suivantes :

$$Bb(a'b'' - b'a'') + C(a' - a'') = 0,$$
$$Aa(a'b'' - b'a'') + C(b'' - b') = 0;$$

faisant les mêmes opérations sur la quatrième et la cinquième des équations (A), on obtiendra

$$(B'b+F'a+D')(a'b''-a''b') + (D'b+E'a+C')(a'-a'') = 0,$$
$$(A'a+F'b+E')(a'b''-a''b') + (D'b+E'a+C')(b''-b') = 0;$$

éliminant $\dfrac{a'b''-b'a''}{a'-a''}$ entre la première et la troisième de ces quatre équations, et $\dfrac{a'b''-b'a''}{b''-b'}$ entre la seconde et la quatrième, on parvient à deux équations qui ne contiennent que a et b; elles sont

$$(B'b+F'a+D')C - (D'b+E'a+C')Bb = 0,$$
$$(A'a+F'b+E')C - (D'b+E'a+C')Aa = 0.$$

Si de cette dernière, qui ne contient b qu'à la première puissance, on tire la valeur de cette inconnue, et qu'on la substitue dans l'autre équation, les termes en a^4 se détruiront, et il restera une équation du troisième degré qui donnera toujours une valeur réelle pour a; mettant cette valeur dans la seconde des équations précédentes, on aura une valeur réelle correspondante de b. Ces deux valeurs de a et b détermineront la position de l'axe ox'; on les substituera dans la première et la quatrième des équations (A), on aura par là deux équations du premier degré en a' et b', desquelles on tirera des valeurs réelles pour ces deux inconnues; les mettant dans les troisième et sixième équations (A), on aura deux équations qui donneront des valeurs réelles pour a'' et b''. Ainsi les trois axes ox', oy', oz' seront parfaitement déterminés et pourront toujours l'être; donc le théorème est démontré.

Les équations (A) étant symétriques par rapport aux inconnues, les valeurs de a, a', a'' doivent être données par la même équation; mais nous venons de voir que cette équation n'est que du troisième degré; elle ne donne donc qu'une valeur pour chacune des inconnues a, a', a''; donc, en général, il n'existe qu'un système d'axes qui satisfasse à la question.

Si la première surface est une sphère, les trois axes ox', oy', oz' sont rectangulaires, donc :

Dans toute surface du second degré il existe trois axes coordonnés rectangulaires pour lesquels l'équation de la surface ne renferme pas les rectangles xy, xz, yz. (Traité des surfaces du second degré, page 162).

M. Monge appelle *droites diamétrales conjuguées communes* les trois directions des trois diamètres conjugués qui sont parallèles entr'eux respectivement dans les deux surfaces.

(2) Les équations des deux surfaces, rapportées à leurs trois droites diamétrales conjuguées communes, sont

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1;$$

éliminant successivement x, y et z entre ces deux équations, on a les trois suivantes :

$$(AB'-BA')y^2 + (AC'-CA')z^2 = A-A',$$
$$(AB'-BA')x^2 - (BC'-CB')z^2 = B'-B,$$
$$(AC'-CA')x^2 + (BC'-CB')y^2 = C'-C,$$

qui représentent les projections de l'intersection des deux surfaces sur les trois plans coordonnés ; par conséquent cette intersection est toujours comprise en même tems sur les surfaces de trois cylindres qui ont pour bases des sections coniques et qui sont parallèles aux trois droites diamétrales conjuguées communes.

Cela fournit une construction des trois droites diamétrales conjuguées communes qui deviennent, comme je l'ai déjà observé, les trois axes rectangulaires de l'une des deux surfaces, lorsque l'autre est celle d'une sphère.

Quels que soient les signes des trois quantités $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$, $(BC'-CB')$, dont le dernier n'est plus arbitraire quand les deux autres sont différens, deux des trois courbes que représentent les trois équations précédentes sont du genre de l'ellipse, et l'autre du genre de l'hyperbole.

(3) Supposons qu'on fasse croître proportionnellement les trois paramètres A', B', C' ; on aura une suite de surfaces toutes concentriques, semblables entr'elles et semblablement placées ; leur équation générale est

$$n(A'x^2 + B'y^2 + C'z^2) = 1;$$

chaque valeur de n donne une de ces surfaces.

Faisons $n = \dfrac{A}{A'}$, auquel cas la nouvelle surface et la première, dont l'équation est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, ont leurs diamètres suivant l'axe des x égaux.

L'équation de la projection de leur intersection sur le plan des yz est

$$(AB' - BA')y^2 + (AC' - CA')z^2 = 0;$$

soit $AB'-BA'>0$, $AC'-CA'>0$; cette équation donne $y=0$, $z=0$; donc les deux surfaces se touchent en deux points situés sur l'axe des x, et n'ont pas d'autres points communs.

Donnons à n une autre valeur égale à $\frac{B}{B'}$; l'intersection de la nouvelle surface et de la première a pour projection sur le plan des xz,

$$(AB'-BA')x^2-(BC'-CB')z^2=0\,;$$

soit $BC'-CB'>0$; nous avons déjà posé $AB'-BA'>0$; par conséquent cette équation représente deux droites passant par l'origine; donc, dans ce cas où les deux surfaces ont leurs diamètres suivant l'axe des y égaux, elles se coupent suivant deux courbes planes dont les points d'intersection sont sur l'axe des y; il est clair qu'en ces points les deux surfaces se touchent.

Supposons enfin à n la valeur $\frac{C}{C'}$; la projection de l'intersection de la surface fixe et de la nouvelle, sur le plan des xy, est

$$(AC'-CA')x^2+(BC'-CB')y^2=0,$$

l'on a $AC'-CA'>0$, $BC'-CB'>0$; donc cette équation donne $x=0$, $y=0$, et par conséquent les deux surfaces se touchent en deux points situés sur l'axe des z et n'ont pas d'autres points communs.

On peut faire d'autres combinaisons sur les signes des quantités $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$, $(BC'-CB')$, mais on parvient toujours à ce théorème :

« Les trois droites diamétrales conjuguées communes ne jouissent
» pas toutes trois des mêmes propriétés. Pour deux de ces droites,
» si les diamètres des deux surfaces qui se trouvent sur l'une
» d'elles sont égaux entr'eux, les surfaces se touchent dans deux
» points diamétralement opposés, et n'ont pas d'autres points
» communs : pour la troisième, si les diamètres des deux sur-
» faces sont égaux entr'eux, non-seulement les deux surfaces se
» touchent en deux points diamétralement opposés, mais encore
» elles se coupent dans le système de deux courbes planes pour
» lesquelles les deux points de contact des surfaces sont deux
» points d'intersection. »

Cela oblige à distinguer les trois droites diamétrales conjuguées communes en deux *extrêmes* et une *moyenne*.

L'axe des x, par exemple, sera une droite diamétrale conjuguée commune extrême, ou moyenne, suivant que les deux coefficiens de y^2 et z^2 dans l'équation

$$AB'-BA')y^2+(AC'-CA')z^2=-A'$$

de la projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan des yz, seront de mêmes signes ou de signes différens.

(4) Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les deux surfaces quelconques du second degré ne sont pas concentriques, et quelque part que soient placés leurs centres, il y a toujours dans chacune d'elles trois diamètres conjugués qui sont respectivement parallèles à trois diamètres conjugués considérés dans l'autre.

Car si l'on conçoit une troisième surface concentrique à la première, semblable et semblablement placée à la seconde, elle a, d'après ce qui précède, trois diamètres conjugués respectivement parallèles à trois diamètres conjugués de la première; mais tous ses diamètres conjugués sont parallèles à des diamètres conjugués de la seconde surface; donc deux surfaces quelconques du second degré ont chacune trois diamètres conjugués parallèles à trois diamètres conjugués de l'autre.

Nous appellerons toujours *droites diamétrales conjuguées communes* les droites parallèles à ces diamètres; deux sont extrêmes et la troisième moyenne.

Si l'on rapporte les deux surfaces à ces trois droites diamétrales, par des coordonnées qui soient respectivement parallèles à ces droites, leurs équations seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'(x-a)^2 + B'(y-b)^2 + C'(z-c)^2 = 1,$$

la première surface ayant son centre à l'origine des coordonnées, et la seconde au point dont les coordonnées sont a, b, c.

(5) Voyons ce qui a lieu quand les deux surfaces se touchent. Si elles se touchent en deux points, elles ont deux plans tangens communs en ces points; or on sait que le plan qui passe par la droite d'intersection de deux plans tangens à une surface du second degré, et par le milieu de la droite qui joint les deux points de contact, contient le centre de la surface et est diamétral opposé à cette droite; donc le plan qui passe par les centres des deux surfaces et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact est, dans les deux surfaces, plan diamétral opposé à cette droite, laquelle est par conséquent parallèle à l'une des trois droites diamétrales conjuguées communes aux deux surfaces. Examinons à laquelle.

Les deux surfaces devant avoir leurs centres dans le plan diamétral opposé à l'une des droites conjuguées communes, supposons que ce soit dans le plan des yz; leurs équations seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'x^2 + B'(y-b)^2 + C'(z-c)^2 = 1.$$

L'intersection de ces deux surfaces a pour projection sur le plan des yz la courbe représentée par l'équation

$$(AB'-BA')y^2+(AC'-CA')z^2-2AB'by-2AC'cz$$
$$+AB'b^2+AC'c^2=A-A',$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(B)\ldots\left\{\begin{array}{l}(AC'-CA')\{(AB'-BA')y-AB'b\}^2\\+(AB'-BA')\{(AC'-CA')z-AC'c\}^2\\+(AB'b^2+AC'c^2+A'-A)(AC'-CA')(AB'-BA')\\-(AC'-CA')A^2B'^2b^2-(AB'-BA')A^2C'^2c^2=0.\end{array}\right.$$

Or, si les deux surfaces se touchent, pour chaque point de contact les valeurs de $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{dz}$, tirées de la première équation, sont égales aux valeurs de $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{dz}$ tirées de la seconde; ainsi l'on a

$$\frac{By}{Ax}=\frac{B'(y-b)}{A'x},\qquad \frac{Cz}{Ax}=\frac{C'(z-c)}{A'x},$$

ou bien

$$(AB'-BA')y-AB'b=0,\qquad (AC'-CA')z-AC'c=0;$$

les valeurs de y et z que donnent ces deux équations sont les coordonnées des points de contact des deux surfaces; ces points se trouvent sur leur intersection, ainsi ces valeurs doivent satisfaire à l'équation (B); pour cela il faut qu'on ait

$$(AB'b^2+AC'c^2+A'-A)(AC'-CA')(AB'-BA')$$
$$-(AC'-CA')A^2B'^2b^2-(AB'-BA')A^2C'^2c^2=0;$$

telle est la condition nécessaire pour que les deux surfaces se touchent. D'après cela, l'équation (B) se réduit à

$$(B')\ldots\left\{\begin{array}{l}(AC'-CA')\{(AB'-BA')y-AB'b\}^2\\+(AB'-BA')\{(AC'-CA')z-AC'c\}^2=0.\end{array}\right.$$

Lorsque les deux coefficiens $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$ sont de même signe, cette équation fournit les deux autres,

$$(AB'-BA')y-AB'b=0,\quad (AC'-CA')z-AC'c=0,$$

qui représentent un point sur le plan des yz; les deux surfaces se touchent donc en deux points situés sur une droite parallèle à l'axe des x, et n'ont pas d'autres points communs;

dans ce cas l'axe des x est une droite diamétrale conjuguée commune extrême (3).

Lorsque les deux coefficiens $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$ sont de signes différens, l'équation (B') représente deux plans se coupant suivant une droite parallèle à l'axe des x; donc les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes en même tems qu'elles se touchent; mais dans ce cas l'axe des x est parallèle à la droite diamétrale conjuguée commune moyenne. On peut donc conclure ce théorème :

« Lorsque deux surfaces quelconques se touchent en deux » points, la corde commune qui passe par les deux points de contact » est toujours parallèle à l'une des trois droites diamétrales con» juguées communes : cette droite est une des extrêmes, si les » deux surfaces n'ont d'autres points communs que leurs points » de contact; elle est, au contraire, la droite diamétrale » moyenne, si les deux surfaces se coupent en même tems qu'elles » se touchent, et alors l'intersection est composée du système » de deux courbes planes pour lesquelles les deux points de » contact des surfaces sont deux points d'intersection. »

L'équation (B') fait voir que les deux surfaces et le système des deux plans de leurs courbes d'intersection ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes.

(6) « Lorsque deux surfaces du second degré se coupent sui» vant deux courbes planes, ces deux surfaces et le système des » deux plans de leurs courbes d'intersection ont les mêmes droites » diamétrales conjuguées communes ; la moyenne de ces droites » est parallèle à la droite d'intersection des deux plans. »

Nous venons de voir que ce théorème a lieu dans le cas où les deux surfaces se touchent en même tems qu'elles se coupent; démontrons-le généralement.

Par les deux courbes d'intersection des deux surfaces on peut faire passer deux cônes (Correspondance, tome III, p. 14); leurs sommets et les centres de ces deux courbes sont dans un même plan qui contient les centres des deux surfaces ; ce plan est dans chacune de ces surfaces plan diamétral opposé à la droite d'intersection des plans de leurs deux courbes communes ; cette droite est donc une des trois droites diamétrales conjuguées communes aux deux surfaces, et ce plan diamétral contient les deux autres.

Prenons-le pour plan des xz, les deux surfaces auront pour équations rapportées à leurs trois droites diamétrales conjuguées communes,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1\,,$$
$$A'(x-a)^2 + B'y^2 + C'(z-c)^2 = 1\,;$$

celle de la projection de leur intersection sur le plan des xy sera

$$(AB'-BA')x^2-(BC'-CB')z^2+2BA'ax+2BC'cz$$
$$=B'-B+BA'a^2+BC'c^2,$$

et devra représenter deux droites, puisque les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes dont les plans sont parallèles à l'axe des y.

Or, pour que cette équation représente deux droites, il faut 1°. Que $(AB'-BA')$ et $(BC'-CB')$ soient de mêmes signes, ce qui prouve que l'axe des y est la droite diamétrale conjuguée commune moyenne des deux surfaces (3) ;

2°. Que l'on ait la condition

$$(BA'a^2+BC'c^2+B'-B)(AB'-BA')(BC'-CB')$$
$$+(BC'-CB')B^2A'^2a^2-(AB'-BA')B^2C'^2c^2=0.$$

D'après cela, l'équation précédente prend la forme :

$$(AB'-BA')\{(BC'-CB')z-BC'c\}^2$$
$$-(BC'-CB')\{(AB'-BA')x+BA'a\}^2=0,$$

et l'on voit qu'elle représente deux plans parallèles à l'axe des y ; le système de ces deux plans forme une surface du second degré rapportée à trois de ses axes conjugués.

Ainsi les deux surfaces proposées et le système des deux plans de leurs courbes d'intersection ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes ; la moyenne de ces droites est parallèle à l'intersection des deux plans.

De ce théorème on pourrait déduire tout le précédent.

On peut en conclure aussi que quand deux surfaces se touchent en deux points sans se couper, ces deux surfaces et le système de leurs deux plans tangens communs ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes. Car alors les deux surfaces peuvent être considérées comme se coupant suivant deux courbes planes infiniment petites, par lesquelles passent leurs deux plans tangens communs.

(7) « Deux surfaces quelconques du second degré étant données, si, 1°. leurs centres sont placés sur une même droite
» diamétrale conjuguée commune extrême ; et si, 2°. les sections faites dans les deux surfaces par le plan diamétral opposé à cette droite, sont semblables entr'elles, l'intersection des
» deux surfaces est composée du système de deux courbes planes
» du second degré, semblables entr'elles, semblablement placées
» et dont les deux plans sont parallèles au plan diamétral, et
» par conséquent parallèles entr'eux. »

En effet, supposons que le centre de la première surface étant à l'origine des coordonnées, celui de la seconde soit sur l'axe des x, les équations des deux surfaces seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'(x-a)^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1,$$

et l'on aura la condition $BC' - CB' = 0$, qui exprime que les sections des deux surfaces par le plan des yz sont semblables entr'elles.

Multipliant la première équation par B' et la seconde par B, et les retranchant l'une de l'autre, on a

$$(AB' - BA')x^2 + 2A'Bax - (BA'a^2 + B' - B) = 0,$$

équation qui représente deux plans parallèles au plan des yz, sur lesquels se trouvent les courbes d'intersection des deux surfaces. Si l'on substitue successivement dans l'une des deux équations de ces surfaces, les deux valeurs de x tirées de la précédente, on aura les équations de ces deux courbes, qui sont semblables et semblablement placées à celle que représente l'équation $By^2 + Cz^2 = 1$.

Il faut que l'axe des x, sur lequel sont les centres des deux surfaces, soit une droite diamétrale conjuguée commune extrême; car les plans des deux courbes d'intersection doivent être parallèles à la droite diamétrale moyenne (6), ce qui n'aurait pas lieu si cette droite était l'axe des x.

Lorsque les deux valeurs de x données par l'équation précédente sont égales, les deux courbes d'intersection se confondent en une seule, et par conséquent les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre, c'est-à-dire qu'elles se touchent dans une courbe. Cette courbe est plane et son plan est parallèle au plan diamétral opposé à la droite menée par les centres des deux surfaces.

(8) Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second » degré sont circonscrites l'une à l'autre, 1°. leur courbe de con» tact est plane; 2°. la droite qui joint leurs centres est pa» rallèle à l'une de leurs droites diamétrales conjuguées com» munes extrêmes; 3°. le plan de leur courbe de contact est » parallèle au plan diamétral opposé à cette droite. »

1°. Si par trois points de la courbe de contact des deux surfaces on mène trois plans tangens à l'une d'elles, ils seront tangens à l'autre.

Concevons deux cônes qui aient leurs sommets au point d'intersection de ces trois plans, et qui soient tangens, l'un à la première surface, et l'autre à la seconde. Les deux courbes de

contact seront planes et passeront par les trois points par lesquels nous avons mené les trois plans tangens, ainsi elles se toucheront en ces points et seront situées dans leur plan, ce qui exige qu'elles se confondent en une seule commune aux deux surfaces, qui par conséquent se touchent suivant une courbe plane.

2°. et 3°. Les centres des deux surfaces doivent se trouver sur la droite qui joint le centre de leur courbe de contact avec le sommet du cône qui leur est tangent suivant cette courbe; et le plan diamétral opposé à cette droite dans chacune des surfaces, est parallèle au plan de la courbe de contact du cône; donc cette droite est une des droites diamétrales conjuguées communes aux deux surfaces; il est facile de voir qu'elle est une des extrêmes; car les deux surfaces se coupent suivant deux courbes dont les plans se confondent en un seul, qui doit être parallèle à la droite diamétrale commune moyenne des deux surfaces (6); cette droite moyenne ne peut donc être la ligne des centres, laquelle par conséquent est une droite extrême.

(9) *Lemme.* « Lorsque deux courbes du second degré
» $\overset{\frown}{BMCN}$, $\overset{\frown}{DMEN}$ touchent une troisième courbe du second
» degré $\overset{\frown}{BDCE}$ (*fig.* 1), aux points B, C pour la première, et
» D, E pour la seconde; ces deux courbes se coupent en quatre
» points M, N, P, Q, tels que les droites $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ passent
» par le point d'intersection des deux droites $\overline{BC}$, $\overline{DE}$. »

En effet, soit R le point d'intersection des tangentes à la courbe $\overset{\frown}{BDCE}$ aux points B, C, et soit T celui des tangentes à la même courbe aux points D, E. La droite $\overline{RT}$ est rencontrée par les deux droites $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ en des points O, K tels qu'on a $\overline{AC} : \overline{AB} :: \overline{OC} : \overline{OB}$, $\overline{AE} : \overline{AD} :: \overline{KE} : \overline{KD}$ (Correspondance, tome III, page 11); si par le point A l'on mène une droite quelconque qui coupe la courbe $\overset{\frown}{BMCN}$ aux points β, γ, la courbe $\overset{\frown}{DMEN}$ aux points δ, ε, et la droite $\overline{RT}$ au point ω, l'on aura $\overline{A\gamma} : \overline{A\beta} :: \overline{\omega\gamma} : \overline{\omega\beta}$, $\overline{A\varepsilon} : \overline{A\delta} :: \overline{\omega\varepsilon} : \overline{\omega\delta}$ (Correspondance, tome III, page 11).

D'après cela, si nous menons une droite par les points A et A, et qu'elle rencontre les deux courbes $\overset{\frown}{BMCN}$, $\overset{\frown}{DMEN}$ aux

points M', M'' respectivement, et la droite $\overline{RT}$ en H, l'on aura $\overline{AN} : \overline{AM'} :: \overline{HN} : \overline{HM'}$, $\overline{AN} : \overline{AM''} :: \overline{HN} : \overline{HM''}$; donc $\overline{AM'} : \overline{AM''} :: \overline{HM'} : \overline{HM''}$; or il est facile de voir que les points M', M'' sont d'un même côté de la droite $\overline{RT}$; par conséquent il faut, pour que la dernière proportion ait lieu, que les deux points M', M'' se confondent en un seul, qui est le point M; ainsi la droite $\overline{MN}$ passe par le point A. Il en est de même de $\overline{PQ}$.

(10) « Lorsque deux surfaces quelconques du second degré » sont circonscrites à une même troisième surface du second » degré, elles se coupent toujours dans le système de deux » courbes planes, dont les plans passent par la même droite que » ceux des deux courbes de contact des deux premières surfaces » avec la troisième. » (*)

En effet, tout plan qui coupera les deux courbes de contact déterminera dans les surfaces trois courbes dont les deux premières toucheront la troisième, chacune en deux points, et par conséquent se couperont en quatre points qui seront deux à deux en ligne droite avec le point où le même plan rencontre la droite d'intersection L des plans deux des courbes de contact (9); donc chacune des courbes d'intersection des deux premières surfaces est telle que la droite qui joint deux quelconques de ses points rencontre la droite L; donc cette courbe est plane et son plan passe par la droite L; donc, etc.

La droite L est parallèle à la droite diamétrale conjuguée commune moyenne des deux surfaces circonscrites à la troisième (6).

Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier de celui-ci :

(11) « Lorsque deux surfaces du second degré coupent une » même troisième surface du second degré, chacune suivant deux » courbes planes, et que les plans de ces quatre courbes passent » tous les quatre par une même droite L, les deux premières » surfaces se coupent suivant deux courbes planes dont les plans » passent par la même droite L. »

Pour donner la démonstration de ce théorème, je me servirai du lemme suivant :

(12) *Lemme.* « Si, par un point A (*fig.* 2) pris dans le plan d'une » section conique, on mène quatre droites $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{DE}$, $\overline{D'E'}$, » qui la coupent aux points B, C; B', C'; D, E; D', E'; » que l'on fasse passer deux courbes du second degré, l'une

(*) C'est ce théorème qu'on a démontré pour un cas particulier, page 299 de ce cahier.

» par les quatre premiers points, et la seconde par les quatre » autres, ces deux courbes se couperont en quatre points M, » N, P, Q, tels que les droites $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ passeront par le » point A. »

En effet, les quatre points $O \neq \overline{BC'}\cdot\overline{B'C}$, $R \neq \overline{BB'}\cdot\overline{CC'}$, $K \neq \overline{DE'}\cdot\overline{D'E}$, et $T \neq \overline{DD'}\cdot\overline{EE'}$ seront sur une même droite $\overline{TO}$ (Correspondance, tome III, page 11). Si, par le point N et le point A, l'on mène une droite, elle rencontrera les courbes $\overset{\frown}{BB'CC'}$, $\overset{\frown}{DD'EE'}$ en deux points M', M'' respectivement, et la droite $\overline{TO}$ en un point H, et l'on aura $\overline{AN} : \overline{AM'} :: \overline{HN} : \overline{HM'}$, $\overline{AN} : \overline{AM''} :: \overline{HN} : \overline{HM''}$; d'où $\overline{AM'} : \overline{HM'} :: \overline{AM''} : \overline{HM''}$; mais les points M', M'' se trouvent toujours d'un même côté de la droite $\overline{TO}$; il faut donc, à cause de la proportion précédente, qu'ils se confondent en un seul, qui est le point M. On verrait de même que $\overline{PQ}$ passe par le point A ; *ce qu'il fallait démontrer.*

(13) Pour déduire de cette proposition la démonstration du théorème, menons un plan quelconque qui coupe les quatre courbes d'intersection des deux premières surfaces avec la troisième; il rencontrera la droite L en un point A, et déterminera dans les surfaces trois courbes telles que les points d'intersection des deux premières avec la troisième, seront deux à deux en ligne droite avec le point A; donc les points d'intersection de ces deux premières courbes seront aussi deux à deux en ligne droite avec le même point A (art. 12, lemme), et cela aura lieu quelle que soit la position du plan coupant; donc l'intersection des deux premières surfaces est composée de deux courbes planes dont les plans passent par la droite L. Donc, etc.

J'ai démontré (Correspondance, tome III, page 11 et suiv.) les derniers articles du Mémoire de M. Monge; je me dispenserai de les rapporter ici; je ferai simplement observer qu'il existe une surface dans laquelle on trouve deux droites qui jouissent de propriétés réciproques, semblables à celles dont il est question dans l'article IX de ce Mémoire. C'est la surface enveloppe de l'espace parcouru par une surface du second degré semblable, semblablement placée et tangente à trois autres surfaces du second degré.

Propriétés de la surface enveloppe de l'espace parcouru par une surface semblable, semblablement placée et tangente à trois autres surfaces du second degré, semblables entr'elles et semblablement placées,

La surface (E) qui enveloppe les surfaces (Ξ), (Ξ'), etc., semblables, semblablement placées et tangentes aux trois autres (Ω), (Ω'), (Ω'') du second degré (*), peut être engendrée d'une seconde manière par une surface mobile (Ω) tangente à trois des surfaces (Ξ), (Ξ'), etc.

Les centres de similitude directe des surfaces (Ω), (Ω'), etc., combinées deux à deux, sont sur une même droite L, et ceux des surfaces (Ξ), (Ξ'), etc. sont sur une droite λ.

Les caractéristiques de la surface (E), considérée comme enveloppe de la surface mobile (Ξ), sont des courbes du second degré, dont les plans passent tous par la droite L.

Par deux de ces courbes on peut mener une surface semblable et semblablement placée à (Ω), (Ω'), etc.; et un cône ayant son sommet sur la droite λ; deux cônes ainsi déterminés se coupent suivant deux courbes du second degré dont les plans passent par la droite L.

Par une seule de ces courbes on peut mener un cône tangent à la surface enveloppe, son sommet est sur la droite λ; deux de ces cônes tangens se coupent suivant deux courbes du second degré dont les plans passent par la droite L.

Pareillement :

Les caractéristiques de la surface (E) considérée comme enveloppe de l'espace parcouru par la surface mobile (Ω), sont des courbes du second degré, leurs plans passent tous par la droite λ.

Par deux de ces courbes on peut faire passer une surface semblable et semblablement placée à (Ω), etc., et un cône ayant son sommet sur la droite L; deux cônes ainsi déterminés se coupent suivant deux courbes du second degré dont les plans passent par la droite λ.

Par une seule de ces caractéristiques on peut mener un cône tangent à la surface enveloppe, son sommet est sur la droite L,

(*) Je suppose que la surface (Ξ), qui en général peut toucher les trois surfaces (Ω), (Ω'), (Ω'') de huit manières différentes, n'en enveloppe aucune, ou les enveloppe toutes trois.

deux de ces cônes tangens se coupent suivant deux courbes planes dont les plans passent par la droite λ.

Ainsi, dans la surface enveloppe que nous considérons, les deux droites L, λ jouissent, l'une par rapport à l'autre, de propriétés qui sont réciproques, comme dans les surfaces du second degré.

Enfin par la courbe du second degré lieu des centres des surfaces (Ω), (Ω'), etc., et celle qu'on obtient dans la surface (E) par un plan passant par la droite L, on peut mener un cône dont le sommet est sur la courbe lieu des centres des surfaces (Ξ), (Ξ'), etc., et, par cette courbe et celle que détermine dans la surface enveloppe tout plan passant par λ, on peut mener un cône dont le sommet engendre la courbe des centres de (Ω), (Ω'), etc.

Quand les surfaces (Ω), (Ω'), etc. sont des sphères, les caractéristiques de la surface enveloppe (E) sont des cercles, et sont en même tems les lignes de courbures de cette surface. (Analyse appliquée à la Géométrie, par Monge, p. 328.)

On peut tirer d'autres conséquences de ce cas particulier. (*Voyez* la Correspondance, tome II, p. 423).

ASTRONOMIE ET GÉODÉSIE.

Sur la détermination de la distance apparente des astres sujets à la parallaxe; par M. Puissant, *Officier supérieur, chef des études à l'Ecole des Ingénieurs-Géographes.*

Le calcul des éclipses de Soleil, ou des passages des planètes sur son disque, est fondé sur celui de la distance angulaire apparente de ces astres. Cette distance, considérée au même instant physique, n'est pas la même, à cause des parallaxes, pour tous les points de la Terre qui voient l'éclipse. En effet, le commencement ou la fin de ce phénomène ayant lieu pour un point particulier de la Terre, lorsque les disques des deux astres paraissent en contact, il arrive en général que ces disques, relativement à tout autre point, ne s'atteignent pas encore, ou que l'un anticipe sur l'autre. Il résulte de là que le problème des longitudes géographiques, par les éclipses de cette espèce, est un des plus compliqués de l'Astronomie-pratique.

M. Lagrange a publié sur cette matière deux Mémoires très-

intéressans; l'un dans les volumes de l'Académie de Berlin (année 1766); l'autre dans les Éphémérides de cette ville, pour l'année 1782 : ce second Mémoire vient d'être reproduit dans la *Connaissance des Tems* pour 1817. La méthode que cet illustre géomètre expose dans celui-ci, étant considérée analytiquement, ne laisse sans doute rien à desirer; mais, sous le rapport de la pratique, elle n'a pu obtenir l'assentiment unanime des astronomes, qui préferent toujours leurs méthodes habituelles, parce qu'elles sont aussi exactes et d'un usage bien plus facile.

Ayant eu occasion de traiter le même sujet, dans mon Cours de Géodésie à l'Ecole d'application des Ingénieurs-Géographes, j'ai remarqué que cette méthode de M. Lagrange était non-seulement susceptible d'offrir les mêmes avantages que les autres, et de mériter en outre la préférence pour les éclipses de Soleil, en y faisant les modifications convenables; mais encore de procurer, avec la plus grande facilité, toutes les formules de parallaxes dont ce géomètre n'a pas parlé. C'est ce que je me propose de faire voir ici, à l'aide des considérations les plûs simples de la Géométrie analytique, mais le plus rapidement possible.

1. Rapportons les points de l'espace à trois axes rectangles; prenons pour origine des coordonnées le centre de la Terre; pour axe des x celui qui passe par l équinoxe du printems; pour axe des y la droite située dans l'écliptique et passant par le point du Cancer; enfin pour axe des z la droite passant par le pôle boréal de l'écliptique.

Soient en outre x,y,z les coordonnées rectangles du centre d'un astre situé dans l'hémisphère boréal, r sa distance au centre de la Terre, a la longitude de cet astre ou l'angle que la projection du rayon r fait avec l'axe des x, b sa latitude ou l'inclinaison du même rayon sur l'écliptique. On aura, comme l'on sait,

$$x=r\cos a\cos b,\quad y=r\sin a\cos b,\quad z=r\sin b. \qquad (1)$$

Soient pareillement ξ, η, ζ les coordonnées rectangles du point où se trouve un observateur sur la surface de la Terre, et g, h la longitude et la latitude du zénit vrai, c'est-à-dire du zénit déterminé par le prolongement du rayon ϱ de la Terre, mené par le lieu d'observation. On aura de même

$$\xi=\varrho\cos g\cos h,\quad \eta=\varrho\sin g\cos h,\quad \zeta=\varrho\sin h. \qquad (2)$$

Enfin prenons le lieu de l'observateur pour l'origine commune de trois autres axes rectangulaires, respectivement parallèles aux primitifs; puis désignons par r' la distance de l'observateur à l'astre, et par a', b' les latitude et longitude apparentes de cet astre. On aura

$$x'=r'\cos a'\cos b',\quad y'=r'\sin a'\cos b',\quad z'=r'\sin b'. \qquad (3)$$

Or il existera évidemment, entre les coordonnées du lieu vrai et du lieu apparent de l'astre, les relations suivantes :

$$x' = x - \xi, \qquad y' = y - \eta, \qquad z' = z - \zeta, \quad (4)$$

ou bien, en ayant égard à celles (1) (2) (3),

$$\left.\begin{aligned} r'\cos a'\cos b' &= r\cos a\cos b - \varrho\cos g\cos h \\ r'\sin a'\cos b' &= r\sin a\cos b - \varrho\sin g\cos h \\ r'\sin b' &= r\sin b - \varrho\sin h \end{aligned}\right\}; \quad (5)$$

si donc l'on divise successivement la seconde et la troisième équation par la première, et qu'on fasse $\frac{\varrho}{r} = \sin\pi$, π étant alors la plus grande parallaxe de hauteur, on aura

$$\left.\begin{aligned} \text{tang}\, a' &= \frac{\sin a\cos b - \sin\pi\sin g\cos h}{\cos a\cos b - \sin\pi\cos g\cos h} \\ \text{tang}\, b' &= \frac{\cos a'(\sin b - \sin\pi\sin h)}{\cos a\cos b - \sin\pi\cos g\cos h} \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Ces formules donnent le lieu apparent en fonction du lieu vrai et de la plus grande parallaxe de hauteur, qu'on nomme ordinairement *parallaxe horizontale.* Il est plus simple dans la pratique, d'évaluer les parallaxes de longitude et de latitude par le lieu vrai, pour en déduire ensuite le lieu apparent. La première parallaxe est $(a'-a)$, et la seconde $(b'-b)$. Voici un moyen très-direct pour les obtenir.

Formules de parallaxes.

2. La première équation (6) ayant lieu quelle que soit l'origine des longitudes, on peut retrancher de chacune d'elles la même quantité, l'arc a, par exemple; ce qui revient évidemment à changer la direction des axes x, y, en les laissant toutefois dans leur plan primitif. D'après cette remarque, on a sur-le-champ

$$\text{tang}(a'-a) = \frac{\sin\pi\sin(a-g)\cos h}{\cos b - \sin\pi\cos(a-g)\cos h}; \quad (7)$$

mais la différence $a'-a$ étant toujours très-petite, même pour la Lune, on pourra réduire cette expression en série, et n'en conserver que les termes les plus sensibles; on aura alors, en secondes de degré,

$$a'-a = \frac{\sin\pi\cos h}{\cos b}\frac{\sin(a-g)}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi\cos h}{\cos b}\right)^2\frac{\sin 2(a-g)}{\sin 1''} + \ldots \quad (7')$$

Par un raisonnement analogue au précédent, les équations (6) se changent de suite en celles-ci :

$$\text{tang}\,(a'-g)=\frac{\sin(a-g)\cos b}{\cos(a-g)\cos b-\sin\pi\cos h},$$

$$\text{tang}\,b'=\frac{\cos(a'-g)\,(\sin b-\sin\pi\sin h)}{\cos(a-g)\cos b-\sin\pi\cos h};$$

ensorte qu'en les divisant l'une par l'autre on a

$$\text{tang}\,b'=\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\left(\text{tang}\,b-\frac{\sin\pi\sin h}{\cos b}\right),$$

ou bien introduisant les distances polaires vraie et apparente, c'est-à-dire faisant $b=90^\circ-\Delta$, $b'=90^\circ-\Delta'$, il vient

$$\cot\Delta'=\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\left(\cot\Delta-\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta}\right).$$

Pour tirer de cette formule la valeur de la parallaxe de latitude ou plutôt de distance polaire, savoir, $\Delta'-\Delta=\sigma$, on remarquera que l'on a d'abord

$$\cot\Delta-\cot\Delta'=\cot\Delta-\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\left(\cot\Delta-\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta}\right),$$

et par suite

$$\frac{\sin(\Delta'-\Delta)}{\sin\Delta\sin(\Delta+\sigma)}=\cot\Delta\left(1-\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\right)+\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\,\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta};$$

enfin

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\Delta+\sigma)}=\frac{\sin(a'-g)\sin\pi\sin h}{\sin(a-g)}-\frac{2\cos\Delta\cos\left(\frac{a+a'}{2}-g\right)\sin\left(\frac{a'-a}{2}\right)}{\sin(a-g)}$$

La parallaxe σ ne serait pas assez facile à évaluer au moyen de cette équation ; mais le calcul par les logarithmes s'effectuera commodément, à l'aide des transformations suivantes.

Faisant le premier terme du second membre $=\text{tang}\,x$, et le deuxième terme $=\text{tang}\,y$; on aura

$$\sin\sigma=(\text{tang}\,x-\text{tang}\,y)\sin(\Delta+\sigma);$$

puis développant et divisant par $\cos\sigma$, il viendra

$$\text{tang}\,\sigma=\frac{(\text{tang}\,x-\text{tang}\,y)\sin\Delta}{1-(\text{tang}\,x-\text{tang}\,y)\cos\Delta}=\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}\sin\Delta}{1-\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}\cos\Delta};\qquad(8)$$

et par suite on aura cette série

$$\sigma = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}\frac{\sin\Delta}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}\right)^2 \frac{\sin 2\Delta}{\sin 1''} + \ldots\ldots \quad (8')$$

Telle est la valeur de la parallaxe de distance polaire. Cette valeur et la précédente (7′) sont dues à M. Delambre.

On observera que les formules des parallaxes d'ascension droite et de déclinaison se déduisent sur-le-champ des formules ci-dessus, en y changeant seulement les longitudes en ascensions droites, et les latitudes en déclinaisons, ce qui revient à prendre l'équateur pour le plan des x y. On trouve avec la même facilité les diverses expressions de la parallaxe de hauteur et celles de la parallaxe annuelle : c'est sur quoi il est par conséquent inutile d'insister.

3. Dans la pratique, on ne connaît *à priori* ni la longitude g, ni la latitude h du zénit ; mais on déduit ces deux coordonnées circulaires de l'ascension droite de ce point et de sa déclinaison, qui sont données immédiatement par l'observation. En effet, l'ascension droite du zénit θ est le tems sidéral de l'observation réduit en degrés, à raison de 1 heure pour 15°, lequel est égal à l'ascension droite moyenne du Soleil, plus au tems moyen ; et la déclinaison du zénit ϕ est égale à la latitude géographique, moins l'angle de la verticale avec le rayon. Or par les principes de la Trigonométrie sphérique on a, en désignant par ω l'obliquité de l'écliptique,

$$\left.\begin{array}{l} \tang g = \cos\omega \tang\theta + \dfrac{\sin\omega \tang\phi}{\cos\theta}, \quad \cos h = \dfrac{\cos\theta\cos\phi}{\cos g}, \\ \text{ou} \qquad \sin h = \sin\phi\cos\omega - \cos\phi\sin\omega\sin\theta \end{array}\right\}. \quad (9)$$

Il suffit, dans la pratique, de faire usage des Tables de logarithmes à 5 décimales, pour calculer, soit le *nonagésime* g et le complément h de sa hauteur, soit les parallaxes précédentes.

4. Quand les latitudes et longitudes apparentes de deux astres sont connues, on détermine en général leur distance apparente par la formule qui donne le côté d'un triangle sphérique quelconque en fonction des deux autres côtés et de l'angle qu'ils comprennent. Soient, par exemple, a', b' les coordonnées circulaires du lieu apparent d'un astre P, et A', B' celles d'un autre astre Q : il est évident que l'on aura, en dénotant par D' la distance apparente cherchée,

$$\cos D' = \sin a' \sin A' + \cos a' \cos A' \cos(b'-B'),$$

ou bien, à cause de $\cos m = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}m$, il viendra

$$\sin^2\tfrac{1}{2}D' = \sin^2\tfrac{1}{2}(a'-A') + \cos a' \cos A' \sin^2\tfrac{1}{2}(b'-B'),$$

formule qui a lieu quelle que soit la grandeur de D'; mais comme dans le cas des éclipses de Soleil ou des passages des planètes sur cet astre, la distance apparente D' est très-petite, et que de plus la latitude du Soleil est nulle, on conçoit qu'en pareille circonstance la formule précédente est plus facile à évaluer numériquement. Cependant notre but étant d'expliquer et de simplifier la méthode que M. Lagrange a proposée à cet effet, nous ne nous étendrons pas davantage sur cette solution trigonométrique.

Détermination de la distance apparente de deux astres, aux approches ou pendant la durée d'une éclipse.

5. Choisissons un nouveau système d'axes rectangulaires $x''y''z''$, ayant toujours pour origine le centre de la Terre; mais supposons l'axe des x'' dirigé vers un point arbitraire C de la sphère céleste, dont la latitude et la longitude vraies soient α, β; puis dénotant par XYZ les angles que cet axe x'' fait avec ceux des xyz primitifs; par $X'Y'Z'$ les angles analogues, relativement à l'axe des y''; enfin par $X''Y''Z''$ les angles qui déterminent de même la direction de l'axe des z''. Cela posé, si $x_{\prime\prime}y_{\prime\prime}z_{\prime\prime}$ sont dans ce nouveau système d'axes, les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, et que $x'y'z'$ soient celles du même point, par rapport au système primitif, on aura visiblement, par la théorie des projections,

$$\begin{aligned} x_{\prime\prime} &= x'\cos X + y'\cos Y + z'\cos Z, \\ y_{\prime\prime} &= x'\cos X' + y'\cos Y' + z'\cos Z', \\ z_{\prime\prime} &= x'\cos X'' + y'\cos Y'' + z'\cos Z''; \end{aligned}$$

mais les arcs X, α, β forment nécessairement un triangle sphérique rectangle dont X est l'hypoténuse; de même les arcs Y, $90^\circ - \alpha$, β sont les côtés d'un autre triangle sphérique rectangle, et ainsi de suite; on a donc, en vertu de la propriété de ce triangle, et en supposant l'axe des y'' dans le plan de l'écliptique,

$$\begin{array}{lll} \cos X = \cos\alpha\cos\beta, & \cos Y = \sin\alpha\cos\beta, & \cos Z = \sin\beta, \\ \cos X' = -\sin\alpha, & \cos Y' = \cos\alpha, & \cos Z' = 0, \\ \cos X'' = -\cos\alpha\sin\beta, & \cos Y'' = -\sin\alpha\sin\beta, & \cos Z'' = \cos\beta, \end{array}$$

auquel cas le plan des $x''z''$ est celui du cercle de latitude du point C.

De là et des relations (3) l'on conclut

$$(a)\left\{\begin{aligned} x_{\prime\prime} &= r'\cos a'\cos b'\cos\alpha\cos\beta + r'\sin a'\cos b'\sin\alpha\cos\beta + r'\sin b'\sin\beta, \\ y_{\prime\prime} &= -r'\cos a'\cos b'\sin\alpha + r'\sin a'\cos b'\cos\alpha, \\ z_{\prime\prime} &= -r'\cos a'\cos b'\cos\alpha\sin\beta - r'\sin a'\cos b'\sin\alpha\sin\beta + r'\sin b'\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Or, en menant, par l'origine des coordonnées, une droite égale et parallèle au rayon vecteur apparent r' d'un astre A, les équations de ce rayon vecteur seront en général

$$y_{\prime\prime} = p' x_{\prime\prime}, \qquad z_{\prime\prime} = q' x_{\prime\prime};$$

celles du rayon vecteur apparent R' de l'astre B seront de même

$$y_{\prime\prime\prime} = P' x_{\prime\prime\prime}, \qquad z_{\prime\prime\prime} = Q' x_{\prime\prime\prime};$$

ainsi la tangente trigonométrique de l'angle Σ' de ces deux rayons ou de la distance angulaire apparente des centres des astres, sera, comme l'on sait

$$(M) \qquad \operatorname{tang}\Sigma' = \frac{\sqrt{(P'-p')^2+(Q'-q')^2+(P'q'-Q'p')^2}}{1+P'p'+Q'q'};$$

expression dans laquelle il ne s'agirait plus que de remplacer $P'Q'p'q'$ par leurs valeurs, si elle n'était d'ailleurs susceptible d'être considérablement simplifiée. Mais voyons auparavant quelles sont en général ces valeurs de $P'Q'p'q'$.

D'abord on a $p' = \frac{y_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$ et $q' = \frac{z_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$, et partant, à cause des relations (a),

$$p' = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tang} a'}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta\operatorname{tang} a' + \sin\beta\dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}},$$

$$q' = \frac{-\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta\operatorname{tang} a' + \cos\beta\dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta\operatorname{tang} a' + \sin\beta\dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}};$$

mettant en outre, au lieu de $\operatorname{tang} a'$ et $\frac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}$ leurs valeurs (6), et faisant, pour abréger,

$$(b)\left\{\begin{aligned} l &= \cos(a-\alpha)\cos b\cos\beta + \sin b\sin\beta \\ m &= \sin(a-\alpha)\cos b \\ n &= \sin b\cos\beta - \cos(a-\alpha)\cos b\sin\beta, \end{aligned}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos(g-\alpha)\cos h\cos\beta + \sin h\sin\beta \\ \mu &= \sin(g-\alpha)\cos h \\ \nu &= \sin h\cos\beta - \cos(g-\alpha)\cos h\sin\beta, \end{aligned}\right.$$

auquel cas l, m, n et λ, μ, ν sont les cosinus des angles que le rayon vecteur r et le rayon de la Terre ϱ font avec les axes $x_{\prime\prime} y_{\prime} z_{\prime}$,

comme il est facile de s'en assurer ; on aura définitivement pour l'astre A, et après avoir fait $\sin \varpi = \psi$ pour simplifier,

$$p' = \frac{m - \mu\psi}{l - \lambda\psi}, \qquad q' = \frac{n - \nu\psi}{l - \lambda\psi}:$$

résultats que l'on obtient tout d'abord, en faisant attention que $rl - \varrho\lambda$, $rm - \varrho\mu$, $rn - \varrho\nu$ sont les projections orthogonales du rayon vecteur apparent r' sur les mêmes axes des coordonnées.

Pareillement, si A, B sont les coordonnées de la position vraie de l'astre B, et qu'on désigne par L, M, N ce que deviennent les relations (b) lorsqu'on y change a en A et b en B; on aura, relativement à ce second astre,

$$P' = \frac{M - \mu\Psi}{L - \lambda\Psi}, \qquad Q' = \frac{N - \nu\Psi}{L - \lambda\Psi},$$

Ψ étant le sinus de la parallaxe horizontale Π.

On remarquera que les deux systèmes d'équations (b), (c) satisfont aux relations suivantes :

$$(d)\left\{\begin{array}{l} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \\ l\lambda + m\mu + n\nu = \cos(r, \rho) = \cos(g - a)\cos b \cos h + \sin b \sin h, \end{array}\right.$$

et que la méthode analytique actuelle signifie en Géométrie, que les lieux apparens des astres sont projetés perspectivement du centre de la sphère céleste, sur un plan qui la touche au point C.

6. On peut être curieux de trouver l'angle V' que le plan du grand cercle, passant par les projections des lieux apparens sur le plan tangent, fait avec le cercle de latitude $x''z''$ du point de contact C : or cela est très-facile ; car soit en général

$$A_1 x_{\prime\prime} + B_1 y_{\prime\prime} + C_1 z_{\prime\prime} = 0,$$

l'équation du plan de ce grand cercle ; les coordonnées des deux projections dont il s'agit étant visiblement, en prenant le rayon de la sphère céleste pour unité,

$$\begin{array}{l} 1, \; p', \; q', \\ 1, \; P', \; Q', \end{array}$$

on aura $A_1 = q'P' - Q'p'$, $B_1 = Q' - q'$, $C_1 = p' - P'$; et comme en général

$$\cos V' = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}},$$

il viendra, par substitution,

$$\text{séc}\, V' = \frac{\sqrt{(q'P' - Q'p')^2 + (Q' - q')^2 + (P' - p')^2}}{Q' - q'}.$$

Supposons maintenant que les projections des deux lieux apparens et le point C soient en ligne droite; on aura alors $q'P' = Q'p'$, et de l'expression précédente on tirera

$$\text{tang}\, V' = \frac{P' - p'}{Q' - q'}.$$

M. Lagrange, en donnant cette valeur particulière de tang V' pour le cas général, a évidemment commis une inadvertance; et la remarque faite à ce sujet, au bas de la page 247 (*Connaiss. des Tems*, année 1817), ne nous paraît pas tout-à-fait exacte.

7. Toutes les formules de l'art. 5 sont de la plus grande généralité; mais il en est quelques-unes qui se simplifient, lorsque l'astre A, par exemple, est dans la direction de l'axe des x'', ou en C. En effet, on a dans ce cas $\alpha = a$, $\beta = b$, et par suite $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$; enfin

$$p' = \frac{-\mu\psi}{1 - \lambda\psi}, \qquad q' = \frac{-\nu\psi}{1 - \lambda\psi};$$

ces deux dernières valeurs sont donc l'effet de la parallaxe de l'astre A placé en C.

Supposons, au contraire, que l'axe des x'' passe par le centre du Soleil B; on aura $\alpha = A$, $\beta = B = 0$, et par conséquent $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$. Quant aux équations (b) (c), elles deviennent

$$(b')\left\{\begin{aligned} l &= \cos(a - A)\cos b,\\ m &= \sin(a - A)\cos b,\\ n &= \sin b, \end{aligned}\right. \qquad (c')\left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos(g - A)\cos h,\\ \mu &= \sin(g - A)\cos h,\\ \nu &= \sin h. \end{aligned}\right.$$

8. Malgré ces simplifications, la formule (M) serait encore beaucoup trop compliquée pour la pratique; mais il est aisé de prouver d'abord que, relativement aux éclipses de Soleil, cette formule peut être réduite à celle-ci:

$$(M') \qquad \text{tang}\, \Sigma' = \sqrt{(p' - P')^2 + (q' - Q')^2},$$

sans qu'il en résulte une erreur d'un dixième de seconde. Soit dans cette vue,

$$\sqrt{(p' - P')^2 + (q' - Q')^2} = \text{tang}\, \sigma,$$

$$\frac{Q'(p' - P') - P'(q' - Q')}{P'(p' - P') + Q'(q' - Q')} = \text{tang}\, s;$$

on aura pour le Soleil

$$\sqrt{P'^2 + Q'^2} = \frac{\Psi\sqrt{1 - \lambda^2}}{1 - \lambda\Psi} = f,$$

et par suite

$$\tang \Sigma' = \frac{\tang \sigma (1 + f^2 \sin^2 s)^{\frac{1}{2}}}{1 + f \cos s \tang \sigma + f^2};$$

M. Lagrange cherche, par un procédé très-élégant, la différence $\Sigma' - \sigma$ en série convergente, où la valeur du premier terme, dans les cas extrêmes, est moindre que $\frac{1}{15}$ de seconde. Pour parvenir à cette conclusion par une voie plus élémentaire et plus courte, prenons le logarithme de chaque membre de l'équation précédente, et développons; il viendra une série de la forme

$$\log \tang \Sigma' = \log \tang \sigma - Kf \cos s \tang \sigma + Kf^2 R - Kf^3 S \ldots,$$

dans laquelle $K = 0,434294$ est le module des Tables. Or le terme $Kf \cos s \tang \sigma$, qui est le plus considérable de la série, acquiert la plus grande valeur lorsque $\cos s = 1$: soit donc $\sigma = 5^\circ$; dans ce cas la quantité f ne pouvant surpasser tang $8'',5$, puisque pour le soleil $\Pi = 8'',5$ à très-peu près, on aura

$$Kf \tang \sigma = 0,0000016,$$

c'est-à-dire que le log tang σ devrait être diminué de $0,0000016$. Mais par hypothèse, $\tang \sigma = \tang 5^\circ$; d'où $\log \tang \sigma = 8,9419518$; ainsi $\log \tang \Sigma'$ ne différant de $\log \tang \sigma$ que de $0,0000016$, il s'ensuit que $\Sigma' = \sigma - 0'',06$. Il est donc prouvé que dans les éclipses de Soleil, et à plus forte raison dans les passages de Vénus et de Mercure sur cet astre, on peut toujours faire $\tang \Sigma' = \tang \sigma$, sans craindre de jamais commettre une erreur de $\frac{1}{10}$ de seconde de degré.

Enfin le même géomètre démontre que l'expression (M'), quoique déjà fort réduite, peut cependant l'être davantage. (Voyez la *Connaissance des Tems* pour 1817, pag. 256.) En effet, d'après ce qui précède on a, par rapport au soleil,

$$\begin{aligned} p' - P' &= \frac{m - \mu\psi}{l - \lambda\psi} - \frac{\mu\Psi}{1 - \lambda\Psi} \\ &= \frac{m - \mu\psi - \mu\Psi(l - \lambda\psi)(1 - \lambda\Psi)^{-1}}{l - \lambda\psi} \\ &= \frac{m - \mu(\psi - l\Psi)}{l - \lambda\psi}, \end{aligned}$$

en négligeant les termes du second ordre comme étant extrêmement petits. Pareillement

$$q'-Q'=\frac{n-\nu\psi}{l-\lambda\psi}-\frac{\nu\Psi}{1-\lambda\Psi}$$
$$=\frac{n-\nu(\psi-l\Psi)}{l-\lambda\psi};$$

mais l différant toujours très-peu de l'unité, on peut supposer, dans le terme $l\Psi$, que $l=1$; ainsi on a simplement

$$p'-P'=\frac{m-\mu(\psi-\Psi)}{l-\lambda\psi},\quad q'-Q'=\frac{n-\nu(\psi-\Psi)}{l-\lambda\psi};$$

partant, l'équation (M') devient

$$(N)\quad \text{tang}\,\Sigma'=\frac{\sqrt{[\overline{m-\mu(\psi-\Psi)}^2+\overline{n-\nu(\psi-\Psi)}^2]}}{l-\lambda\psi},$$

laquelle donne la distance apparente des centres, avec une précision toujours très-suffisante, soit dans les éclipses de Soleil ou les passages des planètes sur son disque, soit dans les occultations des étoiles par la Lune. Dans ce dernier cas, l'on doit diriger l'axe des x'' par l'étoile ou par le centre de la planète occultée, et alors on a $\alpha=A$, $\beta=B$; faisant donc $a-A=t$, $b-B=u$, les relations (b) (c) prendront la forme suivante, comme il est facile de s'en assurer,

$$(b'')\left\{\begin{aligned} l &= \cos u-2\sin^2\tfrac{1}{2}t\cos B\cos b\\ m &= \sin t\cos b\\ n &= \sin u+2\sin^2\tfrac{1}{2}t\sin B\cos b\end{aligned}\right.$$

$$(c'')\left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos(g-A)\cos B\cos h+\sin B\sin h\\ \mu &= \sin(g-A)\cos h\\ \nu &= \cos B\sin h-\cos(g-A)\sin B\cos h,\end{aligned}\right.$$

et l'on aura en outre $\Pi=0$, s'il s'agit des étoiles.

9. Au commencement et à la fin d'une éclipse, les disques des astres paraissent en contact, et alors la distance apparente des centres est égale à la somme des demi-diamètres apparens. Ces diamètres apparens variant en général à différentes hauteurs des astres sur l'horizon, la somme dont il s'agit ne peut être rigoureusement la même que celle qui est déduite des Tables astronomiques; mais la variation des diamètres apparens n'étant réellement sensible que pour la Lune, qui est l'astre le plus près de la Terre, on se borne à évaluer l'*augmentation de son diamètre*. Or si d est le demi-diamètre horizontal de la Lune, donné par les Tables, et d' son demi-diamètre apparent dans un instant quelconque; si, de plus, r et r' sont respectivement

les distances du centre de cet astre au centre de la Terre et au lieu de l'observateur, on aura évidemment

$$\sin d' = \frac{r}{r'} \sin d.$$

Reste à trouver l'expression du rapport $\frac{r}{r'}$. D'abord si on élève au carré chacune des équations (5), et qu'on fasse une somme des résultats, on aura

$$r'^2 = r^2 - 2\varrho\,[\cos(g-a)\cos b \cos h + \sin b \sin h] + \varrho^2,$$

ou, en vertu de la 3ᵉ relation (d), et à cause de $\frac{\varrho}{r} = \sin\pi = \psi$,

$$\frac{r'^2}{r^2} = 1 - 2\psi\,(l\lambda + m\mu + n\nu) + \psi^2.$$

Si ensuite on néglige dans la formule (N) les très-petits termes $\mu\psi$ et $\nu\psi$, ce qui est permis dans cette circonstance, et qu'on ait égard aux relations citées, il viendra, après avoir développé,

$$\begin{aligned}(l-\lambda\psi)\,\text{tang}\,\Sigma' &= \sqrt{(\overline{m-\mu\psi}^2 + \overline{n-\nu\psi}^2)} \\ &= \sqrt{(1-l^2) + \psi^2(1-\lambda^2) - 2\psi(m\mu+n\nu)},\end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$(l-\lambda\psi)^2\,\text{tang}^2\,\Sigma' + (l-\lambda\psi)^2 = 1 - 2\psi(l\lambda + m\mu + n\nu) + \psi^2;$$

ainsi

$$\frac{r'}{r} = (l-\lambda\psi)\,\text{séc}\,\Sigma' = \frac{(l-\lambda\psi)}{\cos\Sigma'};$$

enfin

$$\sin d' = \frac{\sin d \cos\Sigma'}{l-\lambda\psi}.$$

Cela posé, soit D le demi-diamètre horizontal du Soleil, donné par les Tables astronomiques; on aura, au commencement comme à la fin de l'éclipse,

$$\Sigma' = d' + D, \quad \text{ou} \quad \sin d' = \sin\Sigma' \cos D - \cos\Sigma' \sin D;$$

substituant cette valeur de $\sin d'$ dans la précédente, on obtiendra définitivement

$$(P) \qquad \text{tang}\,\Sigma' = \text{tang}\,D + \frac{\sin d}{(l-\lambda\psi)\cos D}.$$

Cette formule et celle (N) donnent le moyen de calculer

toutes les circonstances d'une éclipse; mais afin de pouvoir y appliquer aisément les logarithmes, il est nécessaire de leur faire subir préalablement quelques transformations. C'est pour avoir voulu les traiter directement, que M. Lagrange a rendu sa solution numérique extrêmement pénible, et même rebutante, quand on veut l'appliquer aux occultations des étoiles.

Les bornes de cet ouvrage ne permettant pas de donner plus d'étendue au sujet actuel, nous renverrons à la *Connaissance des Tems* pour 1818, où nous avons exposé, avec tous les détails convenables, les procédés les plus simples pour déterminer, à l'aide des formules ci-dessus, les erreurs des Tables lunaires et les longitudes terrestres.

Note de M. Terquem *sur la hauteur de la ville de Mayence au-dessus du niveau de l'Océan, déterminée par la formule barométrique de M. de Laplace.*

Pour évaluer cette hauteur, j'ai fait usage de la formule suivante, calculée pour la latitude d'un demi-angle droit;

$$z = 18393^{\text{mèt}}\cdot\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)\log\frac{h}{h'\left(1+\frac{t-t'}{5412}\right)}$$

(*Voyez* la Correspondance, tom. II, pag. 353 et la Mécanique de M. Poisson, tom. I, pag. 442).

h hauteur moyenne du baromètre au niveau de l'Océan $= 0^{m},7629$.
t = température moyenne au niveau de l'Océan $= 12^{\circ}$ centigr.
h' = hauteur moyenne du baromètre à Mayence $= 0^{m},7496$.
t' = température moyenne de Mayence $= 9^{\circ},925(C)$

Substituant ces valeurs dans l'expression de z qui est la hauteur cherchée, on trouve $z = 148^{\text{mèt}},238$.

Les valeurs de h et de t sont celles dont M. Biot s'est servi dans son Astronomie physique. h' est le résultat moyen de 1800 observations, et t' le résultat moyen de 5600, toutes faites par feu M. Anschel (*), savant médecin et professeur au Lycée de Mayence.

(*) Enlevé aux sciences et à l'humanité dans la force de l'âge et de son talent pendant la funeste contagion qui a désolé en 1814 la ville de Mayence. Aussi distingué par les qualités du cœur que par ses profondes connaissances dans l'art de guérir, mon malheureux ami a été victime des soins désintéressés et périlleux qu'il prodiguait dans ces tems désastreux, à la classe indigente. Les regrets des gens de bien, et les larmes des pauvres l'ont suivi dans la tombe.

Sur les lignes élastiques à double courbure; par M. Poisson.

Nous aurons besoin, dans cet article, de connaître les angles que fait la perpendiculaire au plan osculateur d'une courbe, avec les trois axes des coordonnées. Pour les déterminer, soit

$$Ax' + By' + Cz' = D,$$

l'équation de ce plan; appelons α, β, γ les angles demandés, de sorte que nous ayons, par les formules connues,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Soient aussi x, y, z les coordonnées du point de la courbe, auquel se rapporte le plan osculateur; comme il doit passer par ce point et par les deux points consécutifs de la même courbe, nous aurons ces trois équations de condition :

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D, \\ Adx + Bdy + Cdz &= 0, \\ Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on devra tirer les valeurs de A, B, C. Si l'on effectue l'élimination, et que, pour simplifier ces valeurs, on prenne la quantité D, qui est indéterminée, égale au dénominateur commun de A, B, C, on aura simplement

$$A = dzd^2y - dyd^2z, \quad C = dyd^2x - dxd^2y, \quad B = dxd^2z - dzd^2x,$$

et par conséquent

$$\cos\alpha = \frac{dzd^2y - dyd^2z}{K}, \quad \cos\beta = \frac{dxd^2z - dzd^2x}{K},$$
$$\cos\gamma = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{K};$$

en faisant, pour abréger,

$$(dzd^2y - dyd^2z)^2 + (dxd^2z - dzd^2x)^2 + (dyd^2x - dxd^2y)^2 = K^2,$$

Maintenant considérons une ligne élastique dont les points soient tirés par des forces données, et qui soit en équilibre. Désignons cette courbe (sans qu'il soit nécessaire de faire la figure) par

AmB, de manière que A et B soient ses extrémités, et m un point quelconque répondant aux coordonnées x, y, z. Supposons que la partie mB de la courbe soit rendue inflexible et fixe, et que l'autre partie mA devienne seulement inflexible en conservant la liberté de tourner autour du point m : l'équilibre de la ligne entière devra encore subsister ; par conséquent les forces données qui agissent sur la partie mA, et les forces d'élasticité qui ont lieu au point m, devront se faire équilibre autour de ce point fixe, ce qui exige que les sommes des momens de ces forces, pris par rapport à trois axes menés par le point m, soient égales à zéro.

Or, l'élasticité au point m tend à produire deux effets distincts. D'abord, elle tend à remettre en ligne droite les deux élémens de la courbe qui aboutissent en ce point, ou plus généralement, si la forme naturelle de cette courbe n'est pas la ligne droite, l'élasticité tend à rendre à l'angle de contingence en m la valeur, plus grande ou plus petite, qu'il avait dans l'état naturel de la courbe. Ce premier effet peut être attribué à une force qui s'exerce dans le plan osculateur de la courbe au point m; appelons donc E le moment de cette force, pris par rapport au point m. L'axe perpendiculaire à son plan fera avec ceux des coordonnées, les angles que nous venons de désigner par α, β, γ; donc, puisque les momens des forces se décomposent suivant les mêmes lois que les forces elles-mêmes (*), il s'ensuit que ceux de la force que nous considérons, rapportés à des droites menées par le point m et parallèles aux axes des x, des y et des z, seront respectivement

$$E\cos\alpha, \qquad E\cos\beta, \qquad E\cos\gamma;$$

ou bien, en faisant $\frac{E}{K} = u$, et mettant pour ces cosinus leurs valeurs précédentes,

$$u(dzd^2y - dyd^2z), \quad u(dxd^2z - dzd^2x), \quad u(dyd^2x - dxd^2y).$$

Lorsque la ligne élastique a été tordue sur elle-même, l'élasticité au point m tend à produire un second effet, qui consisterait à faire tourner la partie mobile mA de la courbe autour du prolongement indéfini de l'élément qui aboutit au point m, et qui appartient à la partie fixe Bm. Nous attribuerons ce second effet à une force qu'on peut appeler la *torsion*, et qui

---

(*) *Voyez* mon Traité de Mécanique, tom. Ier, pag 3. Nous entendons ici par moment relatif à un axe, celui de la force projetée sur un plan perpendiculaire à cet axe.

s'exerce dans un plan perpendiculaire à la tangente au point m. Soit θ son moment, pris par rapport à cette tangente; les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes des x, y, z sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, l'élément de la courbe étant représenté par ds; par conséquent, les momens de la torsion, par rapport aux mêmes axes, seront

$$\frac{\theta dx}{ds}, \quad \frac{\theta dy}{ds}, \quad \frac{\theta dz}{ds}.$$

Enfin désignons par X, Y, Z les composantes des forces données qui agissent, suivant les x, y, z, sur le point de la courbe correspondant à ces coordonnées; la somme des momens, par rapport à l'axe des x, des forces semblables qui agissent sur la partie mA de ces courbes, sera donnée par l'intégrale $\int(zY - yZ)dm$, dans laquelle dm représente l'élément matériel de la courbe; et si l'on veut rapporter les momens de ces forces à la droite menée par le point m, parallèlement à l'axe des x, il est aisé de voir qu'il faudra ajouter à cette intégrale, la quantité $y\int Zdm - z\int Ydm$. On aura des résultats semblables relativement aux axes des y et des z; donc les sommes des momens des forces données, pris par rapport aux trois droites menées par le point m, parallèlement aux axes des x, y, z, seront exprimées par ces formules :

$$\begin{aligned}
&\int(zY - yZ)dm + y\int Zdm - z\int Ydm, \\
&\int(xZ - zX)dm + z\int Xdm - x\int Zdm, \\
&\int(yX - xY)dm + x\int Ydm - y\int Xdm.
\end{aligned}$$

Les six intégrales qu'elles contiennent sont censées renfermer chacune une constante arbitraire provenant des forces particulières qui peuvent être appliquées au point A.

En ajoutant maintenant les momens des forces données et des forces d'élasticité qui se rapportent au même axe, et égalant les sommes à zéro, nous aurons les trois équations d'équilibre de la ligne élastique à double courbure et tordue sur elle-même, savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&u(dzd^2y - dyd^2z) + \frac{\theta dx}{ds} \\
&+ \int(zY - yZ)dm + y\int Zdm - z\int Ydm = 0, \\
&u(dxd^2z - dzd^2x) + \frac{\theta dy}{ds} \\
&+ \int(xZ - zX)dm + z\int Xdm - x\int Zdm = 0, \\
&u(dyd^2x - dxd^2y) + \frac{\theta dz}{ds} \\
&+ \int(yX - xY)dm + x\int Ydm - y\int Xdm = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Si l'on différentie ces équations, on aura

$$dzd(ud^2y) - dyd(ud^2z) + d.\frac{\theta dx}{ds} + dy\int Zdm - dz\int Ydm = 0,$$

$$dxd(ud^2z) - dzd(ud^2x) + d.\frac{\theta dy}{ds} + dz\int Xdm - dx\int Zdm = 0,$$

$$dyd(ud^2x) - dxd(ud^2y) + d.\frac{\theta dz}{ds} + dx\int Ydm - dy\int Xdm = 0;$$

et si l'on ajoute celles-ci, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, on aura

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}.d\theta + \left(\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds}\right)\theta = 0;$$

mais on a identiquement

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2} = 1, \text{ et } \frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds} = 0;$$

d'où il résulte $d\theta = 0$, équation qui montre que le moment de la force de torsion est une quantité constante dans toute l'étendue de la courbe élastique en équilibre.

Ainsi la torsion n'est point une force dont on puisse déterminer la loi par une hypothèse, comme on le fait ordinairement pour l'élasticité proprement dite. La torsion ne dépend ni de la forme de la courbe, ni des forces telles que la pesanteur ou d'autres qui agissent en tous ses points ; elle est produite par une force appliquée à l'une ou l'autre extrémité, et dont le moment, par rapport à la tangente extrême, détermine la valeur de θ; et cette quantité, une fois donnée, reste la même pour tous les autres points de la courbe, de manière que si l'on venait à couper la courbe en un point quelconque, il faudrait, pour l'empêcher de se détordre, employer une force dont le moment, par rapport à la tangente en ce point, serait égal au moment de la force extrême qui a produit la torsion. M. Binet a eu égard le premier à la torsion dont les courbes élastiques sont susceptibles (*); mais on n'avait point encore expliqué la nature de cette force, et montré que son moment est constant dans l'état d'équilibre. Lagrange a donné, dans la Mécanique analytique (**), des équations de la ligne élastique à double

---

(*) Journal de l'Ecole Polytechnique, 17e cahier, pag. 418 et suivantes.

(**) Seconde édition, tom. 1er, pag. 154.

courbure, qu'il a trouvées par une analyse très-différente de la nôtre, et qui reviennent cependant à nos équations (1), en y supposant $\theta = 0$.

En ajoutant ces trois équations, après les avoir multipliées par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$, la quantité u disparaît, et l'on a

$$\theta + \frac{dx}{ds}.\int(zY-yZ)dm + \frac{dy}{ds}.\int(xZ-zX)dm + \frac{dz}{ds}.\int(yX-xY)dm$$
$$+\frac{ydx-xdy}{ds}.\int Zdm + \frac{xdz-zdx}{ds}.\int Ydm + \frac{zdy-ydz}{ds}.\int Xdm = 0. \quad (2)$$

La quantité u disparaîtrait encore, en ajoutant ces mêmes équations, après les avoir multipliées par $\frac{d^2x}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds}$, $\frac{d^2z}{ds}$; supposant de plus ds constant, ce qui est permis et ce qui donne $dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0$, on aura

$$\frac{d^2x}{ds}.\int(zY-yZ)dm + \frac{d^2y}{ds}.\int(xZ-zX)dm + \frac{d^2z}{ds}.\int(yX-xY)dm$$
$$+\frac{yd^2x-xd^2y}{ds}.\int Zdm + \frac{xd^2z-zd^2x}{ds}.\int Ydm + \frac{zd^2y-yd^2z}{ds}.\int Xdm = 0;$$

mais cette équation est une suite de la précédente, comme il est facile de le vérifier, en différentiant celle-ci dans l'hypothèse de ds constant, et observant que $d\theta = 0$.

Il résulte de là que pour déterminer la courbe élastique, on pourra prendre l'équation (2), jointe à l'une des équations (1), ou à telle combinaison qu'on voudra de ces trois équations, pourvu qu'elle renferme encore la variable u. Quant à cette quantité, on a $u = \frac{E}{K}$, et l'on suppose communément le moment E de l'élasticité au point m, proportionnel au carré de l'épaisseur de la courbe, multiplié par l'excès de l'angle de contingence qui a lieu en ce point dans l'état d'équilibre, sur celui qui avait lieu au même point dans l'état naturel de la courbe. Ces angles étant en raison inverse des rayons de courbure qui leur répondent, cette hypothèse revient à faire

$$E = a\varepsilon^2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right),$$

a étant un coefficient qui dépend de la matière de la courbe, ε son épaisseur au point m, ρ son rayon de courbure au même point, et r celui qui avait lieu en ce point dans l'état naturel de la courbe. Comme elle est supposée inextensible, il s'ensuit

que l'arc s, compté de l'extrémité A et aboutissant au point m, ne doit pas changer, quand la courbe est infléchie par les forces qui lui sont appliquées; ainsi le rayon r pourra être censé donné en fonction de s, dans chaque cas particulier. L'expression du rayon ρ, dans une courbe quelconque, est $\rho = \frac{ds^3}{K}$, K ayant la même signification que plus haut; on aura donc

$$u = \frac{E}{K} = \frac{a\epsilon^2}{ds^3} \cdot \left(1 - \frac{ds^3}{rK}\right),$$

pour la valeur de u qu'il faudra substituer dans la seconde équation de la courbe élastique. L'intégration de ces deux équations simultanées est impossible en général, et l'on ne parvient à y séparer les variables que dans des cas très-particuliers et les plus simples qu'on puisse traiter.

Nous terminerons cet article par une remarque qui pourra être souvent utile. Lorsque, dans une question de Géométrie ou de Mécanique, tout est semblable par rapport aux trois axes des coordonnées x, y, z, et si l'on a une équation relative à l'un de ces axes, il existera des équations analogues qui se rapporteront aux deux autres, qui se déduiront de l'équation donnée par de simples permutations des variables x, y, z, et de toutes les autres quantités qui s'y rapportent; mais pour ne pas risquer de se tromper, et pour que les quantités analogues conservent la même signification et ne changent pas de signe, il faudra effectuer cette permutation d'une certaine manière que nous allons indiquer, et dont on concevra aisément la raison. On rangera les lettres x, y, z, et toutes celles qui leur répondent, de cette manière :

$$\begin{array}{l} x,\ y,\ z\ldots\ldots\ldots, \\ z,\ x,\ y\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

puis on remplacera chaque lettre de la ligne supérieure par celle qui se trouve au-dessous dans la ligne inférieure; de sorte que x aille prendre la place de y, y celle de z, et z celle de x: l'équation donnée se changera, par cette permutation, en une autre qui se rapportera à un second axe; et en effectuant sur celle-ci la même permutation, on aura l'équation analogue par rapport au troisième axe. C'est ainsi, par exemple, que nous avons déduit la troisième équation (1), qui se rapporte à l'axe des z, de la première, qui est relative à l'axe des x, et ensuite, par une seconde permutation, la seconde équation, de la troisième.

Mémoire (*) sur l'attraction des sphéroïdes, par M. Rodrigues, Docteur ès-sciences.

PREMIÈRE PARTIE.

Formules générales pour l'attraction des corps quelconques, et application de ces formules à la sphère et aux ellipsoïdes.

1. Désignons par u la distance de l'élément du corps attirant au point attiré, par $\varphi(u)$ la loi de l'attraction, par dm l'élément du corps attirant, et faisons $\Sigma = \int \varphi(u) dm$, cette intégrale étant étendue à toute la masse du corps attirant. Soient ξ, φ, ψ les coordonnées du point attiré; les composantes de l'attraction du corps, suivant ces coordonnées, seront, comme on sait,

$$\frac{d\Sigma}{d\xi}, \quad \frac{d\Sigma}{d\varphi}, \quad \frac{d\Sigma}{d\psi}.$$

Soient a, b, c les coordonnées rectangulaires du point attiré, la loi de l'attraction, celle de la nature, ensorte que $\varphi(u) = \frac{1}{u^2}$; faisons $V = \int \frac{dm}{u}$, les composantes respectives désignées par A, B, C, seront

$$A = -\frac{dV}{da}, \quad B = -\frac{dV}{db}, \quad C = -\frac{dV}{dc}.$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de l'élément dm, ρ sa densité, on aura

$$dm = \rho dx dy dz, \quad u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

et
$$V = \int \frac{\rho dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

On emploie aussi fréquemment des coordonnées polaires, savoir, le rayon mené de l'origine (r), l'angle que ce rayon fait avec une droite fixe (θ), et enfin l'angle formé par le plan de ces deux droites avec un plan fixe passant par la droite fixe (ϖ). Alors on décompose l'attraction suivant le rayon et deux perpendiculaires à ce rayon, l'une dirigée dans le plan de l'angle θ, et tendant à le diminuer; l'autre, perpendiculaire à ce plan, et tendant à diminuer l'angle ϖ. Ces trois composantes seront respectivement

(*) Ce Mémoire a été le sujet d'une thèse soutenue pour le doctorat, devant la Faculté des Sciences de Paris, le 28 juin 1815, sous la présidence de M. Lacroix, Doyen de la Faculté.

$$-\frac{dV}{dr}, \quad -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}, \quad -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\varpi}.$$

2. La quantité $\frac{1}{u}$ (*) satisfait, comme il est aisé de le vérifier, à l'équation

$$\frac{d^2.\frac{1}{u}}{da^2}+\frac{d^2.\frac{1}{u}}{db^2}+\frac{d^2.\frac{1}{u}}{dc^2}=0.$$

On aura donc une relation pareille pour la fonction V, savoir

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=0; \qquad (1)$$

cette conclusion suppose néanmoins que pour aucun point du corps, $\frac{1}{u}$ ne devient infini; ou, ce qui est la même chose, que le point attiré ne fait pas partie de la masse du corps attirant. Dans ce cas, voyons ce qui arrive. L'expression $\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}$ peut être remplacée par celle-ci :

$$-\left(\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}\right).$$

Pour calculer cette formule, transportons l'origine des coordonnées au point attiré, et puis à cette origine prenons des coordonnées polaires, nous aurons

$$x=a+r\cos\theta, \quad y=b+r\sin\theta\cos\varpi, \quad z=c+r\sin\theta\sin\varpi.$$

$$A=-\int\rho\cos\theta\sin\theta d\theta d\varpi dr,$$
$$B=-\int\rho\cos\varpi\sin^2\theta d\theta d\varpi dr,$$
$$C=-\int\rho\sin\varpi\sin^2\theta d\theta d\varpi dr.$$

Ces intégrales doivent être prises depuis $r=0$ jusqu'à la valeur de r relative à la surface du corps, et que nous appellerons R; et par rapport aux angles θ et ϖ, depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\pi$, et depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=2\pi$.

Posons

$$x'=r\cos\theta, \quad y'=r\sin\theta\cos\varpi, \quad z'=r\sin\theta\sin\varpi;$$

ρ sera fonction seulement des trois variables sommes $x'+a$,

(*) *Voyez* une note de M. Poisson sur cet objet, dans le Bulletin de la Société Philomatique pour le mois de décembre 1813, tom. III, pag. 388.

$y'+b$, $z'+c$; on aura donc $\frac{d\rho}{da}=\frac{d\rho}{dx'}$, etc. Désignons par ρ_1, la densité du corps attiré, et par ρ_2 la densité à la surface; et observons qu'en prenant les différences partielles $\frac{dA}{da}$, $\frac{dB}{db}$, $\frac{dC}{dc}$, il faut avoir égard à la variation de la limite R. De cette manière nous aurons

$$-\frac{dA}{da}-\frac{dB}{db}-\frac{dC}{dc},$$

ou

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=\int\frac{\sin\theta d\theta d\varpi dr}{r}\left(x'\frac{d\rho}{dx'}+y'\frac{d\rho}{dy'}+z'\frac{d\rho}{dz'}\right)$$
$$\int\frac{\sin\theta d\theta d\varpi}{R}\cdot\rho_2\left(x'\frac{dR}{da}+y'\frac{dR}{db}+z'\frac{dR}{dc}\right);$$

mais il est évident que $x'\frac{d\rho}{dx'}+y'\frac{d\rho}{dy'}+z'\frac{d\rho}{dz'}=r\frac{d\rho}{dr}$. D'ailleurs, soit $F(x, y, z)=0$ l'équation de la surface du corps; on aura, pour déterminer R,

$$F(a+R\cos\theta,\quad b+R\sin\theta\cos\varpi,\quad c+R\sin\theta\sin\varpi)=0.$$

On tire de cette équation

$$x'\frac{dR}{da}+y'\frac{dR}{db}+z'\frac{dR}{dc}=-R;$$

on trouve donc

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=\int\sin\theta d\theta d\varpi\frac{d\rho}{dr}dr-\int\rho_2\sin\theta d\theta d\varpi.$$

Or il est évident que

$$\int\sin\theta d\theta d\varpi\frac{d\rho}{dr}dr=\int\rho_2\sin\theta d\theta d\varpi-\rho_1\int\sin\theta d\theta d\varpi;$$

d'ailleurs $\int\sin\theta d\theta d\varpi=4\pi$. On a donc, en définitif,

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}+4\pi\rho_1=0. \qquad (2)$$

Application des formules précédentes à l'attraction des sphères.

3. Supposons que le corps attirant soit une sphère, ou plus généralement une couche sphérique ayant l'origine des coordon-

nées pour centre, et composées de couches sphériques homogènes et concentriques, ensorte que la densité ρ ne soit fonction que de la distance au centre de la couche. Soit r le rayon du point attiré, V ne sera fonction que de r, et l'on aura

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}.$$

Si le point attiré ne fait pas partie de la couche attirante, nous aurons

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0;$$

d'où l'on tire, par l'intégration,

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2},$$

A étant une constante. Cette formule exprime l'action totale de la couche sur le point attiré. Si ce point est situé à l'extérieur de la couche, et qu'on l'en éloigne indéfiniment, ensorte que r devienne infinie, l'attraction décroissant en raison inverse du carré de la distance, on devra, dans cette hypothèse, avoir

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{M}{r^2},$$

M étant la masse de la couche; ainsi $A = M$ pour tous les points extérieurs à la couche. Si, au contraire, on considère l'action de la couche dans son intérieur, comme alors elle est évidemment nulle pour $r = 0$, il faut que $A = 0$ toujours. Ainsi, 1°. une couche sphérique homogène, ou seulement composée de couches sphériques homogènes et concentriques, attire un point extérieur, comme si toute sa masse était réunie à son centre. Ce théorème s'applique naturellement à une sphère entière. 2°. Une pareille couche n'exerce aucune action dans son intérieur.

Ces théorèmes subsistent encore lorsque le point attiré est situé à la surface extérieure de la couche sphérique, quant au premier, et à la surface intérieure, quant au second. De leur combinaison on peut aisément déduire l'attraction qu'exerce une couche sphérique sur un point de sa masse. Mais employons plutôt l'équation (2); elle devient

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + 4\pi\rho = 0,$$

ρ étant fonction du seul rayon r. Multiplions cette équation par r^2; elle deviendra

$$d.r^2 \frac{dV}{dr} + 4\pi\rho r^2 dr = 0\,;$$

intégrant, on trouve

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi\int\rho r^2 dr + \text{const.}}{r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis le rayon intérieur de la couche jusqu'au point attiré. Mais à la première limite, l'action de la couche est nulle; on a donc simplement

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi\int\rho r^2 dr}{r^2},$$

ou bien

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{M'}{r^2},$$

M' désignant la portion de la couche sphérique comprise entre sa surface intérieure, et la surface sphérique passant par le point attiré.

Attraction des Cylindres.

4. L'équation (1) s'intègre encore aisément dans le cas d'un cylindre infini, l'axe étant parallèle aux coordonnées z. En effet, V n'est alors fonction que des deux coordonnées a, b, et l'on a pour cette équation

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} = 0\,;$$

d'où l'on tire $r = \varphi(a + b\sqrt{-1}) + \psi(a - b\sqrt{-1})$, résultat sans application directe. Si le cylindre est circulaire et qu'on fasse $a^2 + b^2 = r^2$, V ne sera plus fonction que de r, et l'on aura

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0\,;$$

d'où $-\frac{dV}{dr} = \frac{H}{r}$. C'est la formule de l'attraction d'un cylindre homogène circulaire, ou plus généralement, d'une couche cylindrique circulaire et composée de couches pareilles homogènes, sur un point hors de sa masse. Pour les points intérieurs à cette couche, il est clair que H doit être nul; ainsi il en est d'une couche cylindrique, à cet égard, comme d'une couche sphérique. Soit a le rayon du cylindre, K l'attraction du cy-

lindre sur un point de sa surface extérieure, on aura

$$aK = H, \quad \text{et} \quad -\frac{dV}{dr} = \frac{aK}{r}$$

pour les points extérieurs; reste à déterminer K. Mais prenons l'équation (2) dans le cas du cylindre circulaire; elle donne

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + 4\pi\rho = 0,$$

et l'on en tire, par l'intégration,

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi\int\rho r dr + \text{const.}}{r},$$

l'intégrale étant prise depuis la valeur de r égale au rayon intérieur de la couche cylindrique; mais pour cette valeur de r l'attraction est nulle; ainsi on a seulement

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi\int\rho r dr}{r} = \frac{2A}{r},$$

en désignant par A la portion de la section circulaire de la couche cylindrique comprise entre son rayon intérieur et le rayon r du point attiré. Si $r = a$ on a $-\frac{dV}{dr} = K = \frac{2A}{a}$; ainsi la formule relative aux points extérieurs est

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{2A}{r},$$

A représentant la section circulaire de la couche cylindrique.

Attraction des Ellipsoïdes.

5. Soient K, K', K'' les trois axes d'un ellipsoïde homogène (nous supposerons la densité égale à 1), x, y, z les trois coordonnées de l'élément dm; nous aurons $dm = dxdydz$, et

$$V = \int \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Nous rendrons toutes les limites de cette intégrale triple indépendantes, par la transformation suivante :

$$x = Kr\cos\theta, \quad y = K'r\sin\theta\cos\varpi, \quad z = K''r\sin\theta\sin\varpi.$$

Les variables r, θ et ϖ devant s'étendre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = 1$, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à

$\varpi = 2\pi$; nous aurons alors

$$dxdydz = KK'K''r^2 dr \sin\theta d\theta d\varpi.$$

Nous pouvons donner à cet élément une autre expression qui nous sera fort utile. Considérons la couche elliptique dont la surface intérieure aurait pour équation

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K'^2} + \frac{z^2}{K''^2} = r^2.$$

Soit ε l'épaisseur de cette couche, ds^2 l'élément superficiel correspondant pris sur sa surface; on aura $dxdydz = \varepsilon ds^2$. Soient X, Y, Z les cosinus des angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à la surface intérieure de la couche, dx, dy, dz les différentielles des coordonnées, en ne faisant varier que le paramètre r; nous aurons

$$\varepsilon = Xdx + Ydy + Zdz.$$

On calcule aisément cette formule, et l'on trouve

$$\varepsilon = \frac{rdr}{\sqrt{\frac{x^2}{K^4} + \frac{y^2}{K'^4} + \frac{z^2}{K''^4}}}.$$

Appelons M la masse de l'ellipsoïde, qui est égale, comme on sait, à $\frac{4}{3}\pi KK'K''$, et faisons $V = MZ$; nous aurons

$$\frac{4}{3}\pi Z = \int \frac{r^2 dr \sin\theta d\theta d\varpi}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Différentions cette équation par rapport aux axes K, K', K'', et désignons ces différentielles par la caractéristique δ. Or nous avons $\delta x = \frac{x\delta K}{K}$, $\delta y = \frac{y\delta K'}{K'}$, $\delta z = \frac{z\delta K''}{K''}$; et si nous supposons les excentricités constantes, ensorte que

$$K'^2 = K^2 + e^2, \qquad K''^2 = K^2 + e'^2,$$

e, e' ne variant pas, nous en déduirons $\delta x = \frac{Kx\delta K}{K^2}$,

$\delta y = \frac{Ky\delta K}{K'^2}$, $\delta z = \frac{Kz\delta K}{K''^2}$, et par suite

$$-\tfrac{4}{3}\pi\delta Z = K\delta K \int r^2 dr \sin\theta d\theta d\varpi \left\{ \frac{(x-a)\frac{x}{K^2}+(y-b)\frac{y}{K'^2}+(z-c)\frac{z}{K''^2}}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Mais $KK'K''r^2dr\sin\theta d\theta d\varpi = \varepsilon ds^2$, $X = \frac{\varepsilon x}{rdrK^2}$, $Y = \frac{\varepsilon y}{rdrK'^2}$, $Z = \frac{\varepsilon z}{rdrK''^2}$, résultats aisés à tirer de ce qui précède. On aura donc

$$-\tfrac{4}{3}\pi\delta Z = \frac{\delta K}{K'K''}\int rdr . \int \frac{(x-a)X+(y-b)Y+(z-c)Z}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} ds^2.$$

La seconde de ces intégrales représente la somme de tous les élémens de la surface dont l'équation est

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K'^2} + \frac{z^2}{K''^2} = r^2,$$

multipliés chacun par le cosinus de l'angle qui forme la normale dirigée du dedans au dehors, avec le rayon mené au point attiré et divisés par le carré de ce rayon. Or on prouve aisément qu'une pareille somme est nulle ou égale à 4π, pour une surface quelconque fermée, selon que le point qui est l'origine des rayons est à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface (*).

(*) L'élément $\frac{(x-a)X+(y-b)Y+(z-c)Z}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} ds^2$ n'est autre chose que celui de la surface d'une sphère d'un rayon égal à 1, dont le centre serait au point qui a pour coordonnées a, b, c. Soit $u = 0$ l'équation de la surface, on a

$$X = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}} \text{ etc.};$$

le signe de l'expression de l'élément dont il s'agit sera le même que celui de la quantité

$$(x-a)\frac{du}{dx} + (y-b)\frac{du}{dy} + (z-c)\frac{du}{dz},$$

or faisons,

$$x = a + r\cos\theta,\quad y = b + r\sin\theta\cos\varpi,\quad z = c + r\sin\theta\sin\varpi.$$

Par conséquent, si le point attiré est extérieur à l'ellipsoïde, nous aurons $\delta Z = 0$, l'intégrale multipliée par rdr étant nulle pour toutes les valeurs de r, ainsi

« La fonction $\frac{V}{M}$, calculée pour les points extérieurs à l'el-
» lipsoïde, ne dépend que des excentricités de cet ellipsoïde. »

Mais si le point attiré est dans l'intérieur de l'ellipsoïde, et situé sur une surface dont l'équation soit

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K'^2} + \frac{z^2}{K''^2} = r'^2.$$

L'intégrale multipliée par rdr ne sera nulle que pour toutes les valeurs de r moindres que r', et sera égale à 4π pour toutes les autres; intégrant donc depuis $r = r'$ jusqu'à $r = 1$, nous aurons

$$\delta Z = \frac{3\delta K}{2K'K''}(r'^2 - 1) = \frac{3\delta K}{2K'K''}\left(\frac{a^2}{K^2} + \frac{b^2}{K'^2} + \frac{c^2}{K''^2} - 1\right),$$

et de là,

$$\delta \frac{dZ}{da} = \frac{3a}{KK'K''} \cdot \frac{\delta K}{K},$$

$$\delta \frac{dZ}{db} = \frac{3b}{KK'K''} \cdot \frac{\delta K'}{K'},$$

$$\delta \frac{dZ}{dc} = \frac{3c}{KK'K''} \cdot \frac{\delta K''}{K''}.$$

Pour intégrer ces expressions, j'observe que Z et ses dérivées doivent être nulles pour $K = \infty$. Représentons, pour plus de clarté, par h, h', h'' les axes de l'ellipsoïde, et faisons

---

Cette formule devient $r\frac{du}{dr}$.

Soient r_1, r_2, r_3 les racines réelles de l'équation u transformée. Ces racines étant rangées par ordre de grandeur. On sait que $\frac{du}{dr}$ sera alternativement positif ou négatif, lorsqu'on fera successivement $r = r_1$, $r = r_2$, etc... Si donc le nombre des valeurs de r est pair, la somme des élémens que nous considérons sera nulle pour chaque valeur de ϖ et de θ.

L'intégrale entière sera donc nulle. La surface étant fermée, c'est bien le cas où le point aux coordonnées a, b, c est extérieur. Si au contraire ce point est intérieur, le nombre des valeurs de r sera impair, et alors la somme des mêmes élémens sera positive et égale à un seul d'entr'eux. L'intégrale entière prise pour toutes les valeurs de θ et de ϖ sera donc égale à 4π, surface d'une sphère d'un rayon égal à 1.

$K = \frac{h}{x}$. Les intégrations devront s'étendre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Or nous avons

$$K'^2 = K^2 + e^2, \qquad K''^2 = K^2 + e'^2;$$

faisons $e = \lambda h$, $e' = \lambda' h$, il viendra

$$K' = \frac{h\sqrt{1+\lambda^2 x^2}}{x}, \qquad K'' = \frac{h\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}}{x},$$

et l'on trouvera, en intégrant,

$$-\frac{dZ}{da} = \frac{3a}{h^3}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}} = \frac{A}{M},$$

$$-\frac{dZ}{db} = \frac{3b}{h^3}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}(1+\lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{B}{M},$$

$$-\frac{dZ}{dc} = \frac{3c}{h^3}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}(1+\lambda'^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C}{M}.$$

Posons $F = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}}$, nous trouverons

$$A = \frac{3aM}{h^3} F, \quad B = \frac{3bM}{h^3}\frac{d.\lambda F}{d\lambda}, \quad C = \frac{3cM}{h^3}\frac{d.\lambda' F}{d\lambda'}.$$

Il est aisé de s'assurer que ces expressions vérifient l'équation (2); en effet, on a

$$\delta\left(\frac{d^2Z}{da^2} + \frac{d^2Z}{db^2} + \frac{d^2Z}{dc^2}\right) = -3\delta . \frac{1}{KK'K''};$$

intégrant de manière que l'intégrale soit nulle pour $K = \infty$, on en tire

$$\frac{d^2Z}{da^2} + \frac{d^2Z}{db^2} + \frac{d^2Z}{dc^2} + \frac{3}{KK'K''} = 0,$$

et remettant pour Z sa valeur,

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} + 4\pi = 0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=4\pi.$$

Les formules d'attraction ci-dessus ne sont, comme on le voit, fonctions que des rapports des axes ; d'où l'on peut conclure que l'attraction exercée par une couche elliptique homogène sur un point intérieur, est nulle.

6. Supposons actuellement le point attiré extérieur à l'ellipsoïde; nous savons qu'alors la fonction $\frac{V}{M}$ ne dépend que des excentricités e, e'; il en sera de même des rapports $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{M}$, $\frac{C}{M}$. Soient donc M', l, l', l'' la masse et les axes d'un nouvel ellipsoïde décrit des mêmes foyers que le premier, et dont la surface passerait par le point attiré. Soient A', B', C' les composantes de son attraction, nous aurons

$$A=\frac{A'M}{M'},\quad B=\frac{B'M}{M'},\quad C=\frac{C'M}{M'},$$

$$l'^2=l^2+e^2,\quad l''^2=l^2+e'^2,\quad \frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{l'^2}+\frac{c^2}{l''^2}=1.$$

Ces trois dernières équations n'admettent qu'un seul système de valeurs pour l, l', l''.

A', B', C' pourront être calculées par les formules qui servent pour les points intérieurs. Posons $e=\mu l$, $e'=\mu' l$, ... $F=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+\mu^2x^2}\sqrt{1+\mu'^2x^2}}$, nous avons

$$A'=\frac{3aM'}{l^3}F,\quad B'=\frac{3bM'}{l^3}\frac{d.\mu F}{d\mu},\quad C'=\frac{3cM'}{l^3}\frac{d.\mu' F}{d\mu'},$$

et par suite

$$A=\frac{3aM}{l^3}F,\quad B=\frac{3bM}{l^3}\frac{d\mu.F}{d\mu},\quad C=\frac{3cM}{l^3}\frac{d.\mu' F}{d\mu'}.$$

7. En repassant les calculs qui ont conduit à la fonction F, on trouve que les quantités $\frac{F}{l^3}$, $\frac{1}{l^3}\frac{d.\mu F}{d\mu}$, $\frac{1}{l^3}\frac{d.\mu' F}{d\mu'}$ peuvent être remplacées par ces trois intégrales

$$-\int\frac{dK}{K}\times\frac{1}{KK'K''},\quad -\int\frac{dK'}{K'}\times\frac{1}{KK'K''},\quad -\int\frac{dK''}{K''}\times\frac{1}{KK'K''},$$

prises depuis $K=\infty$ jusqu'à $K=l$. Désignons-les respectivement par P, Q, R, nous aurons

$$\frac{dA}{da}=3MP+3Ma\,\frac{dP}{da},$$

$$\frac{dB}{db}=3MQ+3Mb\,\frac{dQ}{db},$$

$$\frac{dC}{dc}=3MR+3Mc\,\frac{dR}{dc},$$

et par suite,

$$\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}=3M(P+Q+R)+3M\left(a\frac{dP}{da}+b\frac{dQ}{db}+c\frac{dR}{dc}\right).$$

Or,
$$\frac{dP}{da}=-\frac{\frac{dl}{da}}{l}\times\frac{1}{ll'l''},\qquad \frac{dQ}{db}=-\frac{\frac{dl'}{db}}{l'}\times\frac{1}{ll'l''},$$

$$\frac{dR}{dc}=-\frac{\frac{dl''}{dc}}{l''}\times\frac{1}{ll'l''};$$

par ce que nous avons vu plus haut,

$$P+Q+R=\frac{1}{ll'l''}.$$

Ainsi,
$$\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}=\frac{3M}{ll'l''}\left(1-a\frac{\frac{dl}{da}}{l}-b\frac{\frac{dl'}{db}}{l'}-c\frac{\frac{dl''}{dc}}{l''}\right).$$

Or, de l'équation $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{l'^2}+\frac{c^2}{l''^2}=1$, on tire

$$\frac{a}{l^2}=l\,\frac{dl}{da}\left(\frac{a^2}{l^4}+\frac{b^2}{l'^4}+\frac{c^2}{l''^4}\right),$$

$$\frac{b}{l'^2}=l'\,\frac{dl'}{db}\left(\frac{a^2}{l^4}+\frac{b^2}{l'^4}+\frac{c^2}{l''^4}\right),$$

$$\frac{c}{l''^2}=l''\,\frac{dl''}{dc}\left(\frac{a^2}{l^4}+\frac{b^2}{l'^4}+\frac{c^2}{l''^4}\right),$$

en observant que $l\,dl=l'dl'=l''dl''$.

Multiplions la première équation par $\frac{a}{l^2}$, la deuxième par $\frac{b}{l'^2}$,

la troisième par $\frac{l''^2}{c}$, et ajoutons, nous trouverons

$$a\frac{\frac{dl}{da}}{l}+b\frac{\frac{dl'}{db}}{l'}+c\frac{\frac{dl''}{dc}}{l''}=1.$$

Ainsi, $\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}=0$, ce qui vérifie l'équation (1).

8. De la comparaison des formules d'attraction sur les points intérieurs et extérieurs, on déduit très-simplement le théorème suivant, dû à M. Yvory.

« Si l'on a deux ellipsoïdes homogènes qui aient le même » centre et les mêmes foyers, l'attraction, suivant chaque axe, » que l'un des deux corps exerce sur un point de la surface » de l'autre, est à l'attraction de celui-ci sur le point *correspondant* de la surface du premier, comme le produit des deux » autres axes du premier ellipsoïde, est au produit des deux » autres axes du second. »

M. Yvory appelle points correspondans sur les surfaces de deux ellipsoïdes rapportés aux mêmes axes, deux points dont les coordonnées sont entr'elles dans le rapport des axes auxquels elles sont parallèles.

La démonstration directe de ce théorème est très-facile, et M. Poisson a même observé qu'elle s'appliquait à une loi quelconque d'attraction et conduisait toujours au même résultat (*). Ainsi, par exemple, considérons deux sphères concentriques, l'attraction de la première sur un point de la surface de la seconde, est à l'attraction de celle-ci sur un point de la surface de la première, dans le rapport des carrés des deux sphères, indépendamment de la loi de l'attraction. Soient A, A', r, r' les attractions et les rayons des deux sphères, on aura la relation

$$A=\frac{A'r^2}{r'^2},$$

qui servira à faire connaître l'attraction d'une sphère sur un point extérieur, lorsqu'on connaîtra celle qu'elle exerce sur un point intérieur, et réciproquement. Si $r>r'$, et si la loi de l'attraction est celle de la nature, on aura $A'=\frac{4}{3}\frac{\pi r'^3}{r^2}$, et $A=\frac{4}{3}\pi r'$, pour l'attraction de la sphère dont le rayon est r sur un point intérieur. A étant indépendant du rayon r, il

(*) *Voyez* le Bulletin de la Société Philomatique, année 1812, tome III, pag. 180.

s'ensuit que l'action d'une couche sphérique sur un point intérieur est nulle. Réciproquement, pour que ce théorème existe, il faut que A soit indépendant de r; mais alors on a $A' = \frac{H}{r^2}$, H étant une constante par rapport à r, c'est-à-dire que dans ce cas les sphères attirent les points extérieurs en raison inverse du carré de la distance à leur centre, ce qui exige évidemment que l'attraction même d'une molécule suive la même loi. « La loi de la nature est donc la seule dans laquelle une » couche sphérique n'exerce aucune action dans son intérieur. »

SECONDE PARTIE.

Attraction des Sphéroïdes infiniment peu différens d'une sphère, et développement général de la fonction V.

9. Nous emploierons dans toute cette seconde Partie les coordonnées polaires, et nous désignerons toujours par r, μ, ϖ celles du point attiré, et par r', μ', ϖ' celles du corps, μ, μ' étant mis pour $\cos\theta$, $\cos\theta'$.

On a $a = \mu r$, $b = \sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi r$, $c = \sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi r$, et

$$V = \int \frac{\rho' r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{r'^2 - 2rr'[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)] + r^2}}.$$

L'origine des coordonnées étant prise dans le corps même, soit

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}t + T^{(2)}t^2 + \text{etc.}\ldots \qquad (3)$$

le développement du radical

$$[1 - 2[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)]t + t^2]^{-\frac{1}{2}};$$

V pourra se développer dans les deux séries suivantes :

$$V = \frac{V^{(0)}}{r} + \frac{V^{(1)}}{r^2} + \frac{V^{(3)}}{r^3} + \text{etc.}\ldots, \qquad (4)$$

$$V = v^{(0)} + v^{(1)}r + v^{(2)}r^2 + \text{etc.}\ldots, \qquad (5)$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{aligned} V^{(m)} &= \int \rho' T^{(m)} r'^{m+2} dr' d\mu' d\varpi' \\ v^{(m)} &= \int \rho' T^{(m)} r'^{1-m} dr' d\mu' d\varpi' \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

La série (4) sera convergente si r est toujours $> r'$, ce qui est le cas d'un point extérieur à un sphéroïde infiniment peu diffé-

rent d'une sphère, l'origine étant au centre du sphéroïde. La série (6), au contraire, sera convergente si r est toujours $< r'$, ce qui est le cas d'un point intérieur à une couche sphéroïdique. Ces conditions de convergence sont indispensables pour la certitude des résultats.

Développement de la fonction **T.**

10. La fonction T n'est autre chose que le radical........ $[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-\frac{1}{2}}$, dans lequel on ferait $x=\mu t$, $y=\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi' t$, $z=\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi' t$; $a=\mu'$, $b=\sqrt{1-\mu'^2}\cos\varpi$, $c=\sqrt{1-\mu'^2}\sin\varpi$; or on a

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{d^2T}{dz^2}=0.$$

Cette équation devient, par la transformation,

$$\frac{d.(1-\mu^2)\frac{dT}{d\mu}}{d\mu}+\frac{\frac{d^2T}{d\varpi^2}}{1-\mu^2}+t\,\frac{d^2.Tt}{dt^2}=0, \qquad (7)$$

Si l'on y substitue pour T la série (3), on trouve, pour déterminer $T^{(m)}$, l'équation

$$\frac{d(1-\mu^2)\frac{dT^{(m)}}{d\mu}}{d\mu}+\frac{\frac{d^2T^{(m)}}{d\varpi^2}}{1-\mu^2}+m(m+1)T^{(m)}=0.$$

Représentons par Z_m l'intégrale de cette équation; cherchons-en l'expression, puis nous en déduirons $T^{(m)}$ par quelques conditions particulières à ce coefficient. On aura

$$\frac{d.(1-\mu^2)\frac{dZ_m}{d\mu}}{d\mu}+\frac{\frac{d^2Z_m}{d\varpi^2}}{1-\mu^2}+m(m+1)Z_m=0. \qquad (8)$$

Posons

$$Z_m=y_0+y_1(A^{(1)}\sin\varpi+B^{(1)}\cos\varpi)+y_2(A^{(2)}\sin 2\varpi+B^{(2)}\cos 2\varpi)\ldots\text{etc.}$$

le coefficient général y_n sera donné par l'équation

$$\frac{d.(1-\mu^2)\frac{dy_n}{d\mu}}{d\mu}+\left[m(m+1)-\frac{n^2}{1-\mu^2}\right]y_n=0.$$

Pour le développement le plus général de Z_m, il faudrait pouvoir supposer n purement algébrique dans cette équation ; mais nous n'avons pu intégrer qu'en le supposant un nombre entier, ce qui, du reste, n'influera en rien sur l'application que nous voulons faire au coefficient $T^{(m)}$ (*).

Faisons $y_n = (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} x_n$, il vient

$$(m-n)(m+n+1)x_n - 2(n+1)\mu\frac{dx_n}{d\mu} + 1-\mu^2\frac{d^2x_n}{d\mu^2} = 0. \quad (9)$$

Si au contraire nous faisons $y_n = (1-\mu^2)^{-\frac{n}{2}} x_{-n}$, nous avons

$$(m+n)(m-n+1)x_{-n} - 2(n-1)\mu\frac{dx_{-n}}{d\mu} + (1-\mu^2)\frac{d^2x_{-n}}{d\mu^2} = 0. \quad (10)$$

Ces deux équations ne diffèrent que par le signe de n, ce qui tient à ce que ce signe est indifférent dans l'équation qu'on transforme. On aura

$$x_n = (1-\mu^2)^{-n} x_{-n}.$$

Les équations (9) et (10), différentiées p fois de suite et multipliées après la différentiation, la première par $(1-\mu^2)^{n+p}$, la seconde par $(1-\mu^2)^{p-n}$, donnent

$$(m-n-p)(m+n+p+1)(1-\mu^2)^{n+p}\frac{d^px_n}{d\mu^p}$$

$$+\frac{d.(1-\mu^2)^{n+p+1}\dfrac{d^{p+1}x_n}{d\mu^{p+1}}}{d\mu} = 0, \quad (11)$$

$$(m+n-p)(m-n+p+1)(1-\mu^2)^{p-n}\frac{d^px_{-n}}{d\mu^p}$$

$$+\frac{d.(1-\mu^2)^{p-n+1}\dfrac{d^{p+1}x_{-n}}{d\mu^{p+1}}}{d\mu} = 0. \quad (12)$$

Supposons d'abord $n < m$, ou tout au plus égal à m, et faisons $p = m-n$ dans l'équation (11), nous aurons

$$d.(1-\mu^2)^{m+1}\frac{d^{m-n+1}x_n}{d\mu^{m-n+1}} = 0;$$

(*) L'analyse qui va suivre avait été employée en très-grande partie dans un deuxième Mémoire de M. Ivory, sur l'attraction des sphéroïdes (Transactions philosophiques, tom. 102, année 1812, 1re partie) et dans la Section XI du troisième Supplément aux Exercices du Calcul intégral, par M. Legendre. Je ne connaissais aucun de ces ouvrages lorsque je fis mon travail.

d'où, par l'intégration, on tire

$$\frac{d^{m-n}x_n}{d\mu^{m-n}} = A + B\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}.$$

Faisons maintenant $p=0$, $p=1,\ldots.p=m-n-1$ dans la même équation; nous trouvons

$$(1-\mu^2)^n x_n = -\frac{d.(1-\mu^2)^{n+1}\frac{dx_n}{d\mu}}{d\mu}\times\frac{1}{(m-n)(m+n+1)},$$

$$(1-\mu^2)^{n+1}\frac{dx_n}{d\mu} = -\frac{d.(1-\mu^2)^{n+2}\frac{d^2x_n}{d\mu^2}}{d\mu^2}\times\frac{1}{(m-n-1)(m+n+2)},$$

etc....

$$(1-\mu^2)^{m-1}\frac{d^{m-n-1}.x_n}{d\mu^{m-n-1}} = -\frac{d.(1-\mu^2)^m\frac{d^{m-n}x_n}{d\mu^{m-n}}}{d\mu}\times\frac{1}{1.2m}.$$

Si l'on substitue l'expression du premier membre de la dernière équation dans le second membre de la précédente, et ainsi de suite jusqu'à la première équation, on trouve

$$x_n = \frac{d^{m-n}.(1-\mu^2)^m\frac{d^{m-n}x_n}{d\mu^{m-n}}}{(1-\mu^2)^n d\mu^{m-n}}\times\frac{(-1)^{m-n}}{1.2.3\ldots m-n.m+n+1\ldots 2m}.$$

Si dans cette expression l'on met pour $\frac{d^{m-n}.x_n}{d\mu^{m-n}}$ la valeur que nous en avons donnée plus haut, et qu'on change les constantes, on aura

$$x_n = \frac{d^{m-n}.(1-\mu^2)^m.\left(C + D\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+2}}\right)}{(1-\mu^2)^n d\mu^{m-n}}.$$

Cette expression, contenant deux constantes arbitraires, est précisément l'intégrale complète de l'équation (9); elle se compose d'une partie irrationnelle et d'une autre entière et rationnelle du degré $m-n$. Car il est facile de s'assurer, par la différentiation, que cette dérivée $\frac{d^{m-n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m-n}}$ est exactement divisible par $(1-\mu^2)^n$.

11. Au lieu de faire $p=m-n$ dans l'équation (11), faisons $p=m+n$ dans l'équation (12); elle devient immédiatement

intégrable et donne

$$\frac{d^{m+n}x_{-n}}{d\mu^{m+n}} = E + G\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}.$$

Faisons dans cette équation $p=0$, $p=1\ldots p=m+n-1$; traitons les résultats comme ci-dessus, et nous en tirerons

$$x_n = (1-\mu^2)^n \frac{d^{m+n}.(1-\mu^2)^m\left[F+K\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}\right]}{d\mu^{m+n}};$$

mais $x_n=(1-\mu^2)^{-n}x_{-n}$. On aura donc encore pour x_n cette expression, aussi générale que la première,

$$x_n = \frac{d^{m+n}.(1-\mu^2)^m\left[F+K\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}\right]}{d\mu^{m+n}}.$$

Identifiant les parties entières et rationnelles, dans les deux expressions, et en déterminant les constantes pour que les premiers termes soient les mêmes, on a cette relation remarquable,

$$(-1)^n(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m+n)\frac{d^{m-n}.(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m-n}}$$
$$= (1-\mu^2)^n\frac{d^{m+n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m+n}}.$$

Supposons maintenant $n>m$; aucune valeur de p ne peut alors rendre l'équation (11) immédiatement intégrable; mais si dans l'équation (12) nous faisons $p=n-m-1$, que nous intégrions, etc.; enfin si nous traitons cette équation par un procédé pareil à celui que nous avons employé ci-dessus, nous trouverons

$$x_n = \frac{d^{n-m-1}.(1-\mu^2)^{-m-1}[H+L\int(1-\mu^2)^m d\mu]}{d\mu^{m-n-1}}.$$

Cette formule ne contient aucune partie entière et rationnelle, ainsi l'on ne doit pas supposer $n>m$, lorsqu'on ne veut pour x_n que des valeurs de cette espèce.

Nous aurons donc dans cette hypothèse, qui est la seule qui convienne pour la fonction $T^{(m)}$,

$$x_n = J\,\frac{d^{m+n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m+n}},$$

et par suite,

$$y_n = J(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{m+n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m+n}},$$

J étant une constante; mais elle peut être censée comprise dans $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$. Si nous posons $R_m = \frac{d^m(1-\mu^2)^m}{d\mu^m}$, nous aurons

$$(13) \quad Z_m = B^{(0)}R_m + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dR_m}{d\mu}(A^{(1)}\sin\varpi + B^{(1)}\cos\varpi) + \text{etc...}$$

$$+ (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^nR_m}{d\mu^n}(A^{(n)}\sin n\varpi + B^{(n)}\cos n\varpi),$$

$B^{(0)}$, $A^{(1)}$ $B^{(1)} \ldots . A^{(n)}$ $B^{(n)}$ étant des constantes arbitraires, au nombre de $2m+1$. Avec un peu d'attention, on voit que cette formule donne pour Z_m une fonction entière et rationnelle des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, la plus générale qui satisfasse à l'équation (8).

Réciproquement, toute fonction entière et rationnelle de ces trois quantités peut se développer en une suite de fonctions telles que Z_m. (Voyez la Mecanique Céleste.)

12. Pour déduire $T^{(m)}$ de l'expression générale (13), j'observe que $T^{(m)}$ doit être symétrique par rapport aux variables μ, μ', ϖ, ϖ', et ne doit contenir que les cosinus des multiples de $\varpi'-\varpi$. Si donc on fait R'_m égal à ce que devient R_m en accentuant μ, on aura d'abord

$$T^{(m)} = L_0R_mR'_m + L_1(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dR_m}{d\mu}\frac{dR'_m}{d\mu'}\cos(\varpi'-\varpi)\ldots.$$

$$+ L_n(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^nR_m}{d\mu^n}\frac{d^nR'_m}{d\mu'^n}\cos n(\varpi'-\varpi),$$

$L_0 L_1 \ldots . L_n$ étant des coefficiens numériques. Pour les déterminer, je suppose $\mu=\mu'$; alors le coefficient de $\cos n(\varpi'-\varpi)$ devient $L_n(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu}\right)^2$. Le terme le plus élevé par rapport à μ, dans ce coefficient, est égal à

$$(-1)^nL_n(2m.2m-1\ldots\ldots m-n+1)\mu^{2m};$$

mais si $\mu=\mu'$, $T=\left\{1-4t[\mu^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varpi'-\varpi)+\tfrac{1}{2}\cos(\varpi'-\varpi)]+t^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$, et il est aisé de s'assurer que dans $T^{(m)}$ le terme du plus haut exposant est

$$\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots 2m} 2^{2m}\sin^{2m}\tfrac{1}{2}(\varpi'-\varpi).\mu^{2m}.$$

Or le coefficient de $\cos n\,(\varpi'-\varpi)$, dans le développement de $2^{2m}\sin^{2m}\frac{1}{2}(\varpi'-\varpi)$, est égal à

$$(-1)^n.2.\frac{2m.2m-1\ldots.m+n+1}{1.2.3\ldots.m-n};$$

en supprimant le facteur 2 pour $n=0$, on aura donc, par la comparaison,

$$L_n=\frac{2}{2^{2m}\times(1.2.3\ldots m)^2}\times m-n+1.m-n+2\ldots m+n.$$

De tout cela il résulte, en posant

$$M=\frac{d^{2m}(1-\mu^2)^m(1-\mu'^2)^m}{d\mu^m d\mu'^m}\times\frac{1}{2^{2m}.(1.2.3\ldots m)^2}\quad \mu=\cos\theta\quad \mu'=\cos\theta',$$

$$T^{(m)}=M+\frac{2\sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi'-\varpi)}{m(m+1)}\,\frac{d^2M}{d\mu d\mu'}+\text{etc.}\ldots.$$
$$+\frac{2\sin^m\theta\sin^m\theta'\cos m(\varpi'-\varpi)}{1.2.3\ldots2m}\,\frac{d^{2m}M}{d\mu^m d\mu'^m}.$$

La comparaison de cette formule avec le type général (13) donne

$$\left.\begin{array}{l} B^{(0)}=\dfrac{R'_m}{2^{2m}(1.2.3\ldots m)^2}\ \ldots\ldots\ B^{(n)}=\cos n\varpi \\ A^{(0)}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A^{(n)}=\sin n\varpi \end{array}\right\}$$

$$\times\frac{2(-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}\dfrac{d^nR'_m}{d\mu'^n}}{2^{2m}(1.2.3\ldots.m)^2(m-n+1)(m-n+2)\ldots.(m+n)}.$$

13. L'équation (11) devient, en y faisant $n=0$, $x_0=R_m$,

$$(m-p)\,(m+p+1)\,(1-\mu^2)^p\,\frac{d^pR_m}{d\mu^p}+\frac{d.(1-\mu^2)^{p+1}\dfrac{d^{p+1}R_m}{d\mu^{p+1}}}{d\mu}=0;$$

changeant m en m', on aura cette autre :

$$(m'-p)(m'+p+1)(1-\mu^2)^p\,\frac{d^pR_{m'}}{du^p}+\frac{d.(1-\mu^2)^{p+1}\dfrac{d^{p+1}R_{m'}}{d\mu^{p+1}}}{d\mu}=0,$$

Si nous multiplions la première par $\frac{d^pR_{m'}}{d\mu^p}$, et que nous inté-

grions ensuite depuis $\mu=-1$ jusqu'à $\mu=+1$, il viendra

$$(m-p)(m+p+1)\int(1-\mu^2)^p \frac{d^pR_m}{d\mu^p}\frac{d^pR_{m'}}{d\mu^p}d\mu$$
$$=\int(1-\mu^2)^{p+1}\frac{d^{p+1}R_m}{d\mu^{p+1}}\frac{d^{p+1}R_{m'}}{d\mu^{p+1}}d\mu.$$

La seconde équation, multipliée par $\frac{d^pR_m}{d\mu^p}$ et intégrée pareillement, fournira un résultat qui ne différera de celui-ci que par le signe de m. La comparaison de ces deux résultats donne, lorsque m et m' sont différens,

$$\int(1-\mu^2)^p\frac{d^pR_m}{d\mu^p}\frac{d^pR_{m'}}{d\mu^p}d\mu=0. \qquad (14)$$

Si $m=m'$, on a successivement, en faisant $p+1=n$,

$$\int(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2d\mu$$
$$=(m+n)(m-n+1)\int(1-\mu^2)^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}R_m}{d\mu^{n-1}}\right)^2d\mu,$$
$$\int(1-\mu^2)^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}R_m}{d\mu^{n-1}}\right)^2d\mu$$
$$=(m+n-1)(m+n-2)\int(1-\mu^2)^{n-2}\left(\frac{d^{n-2}R_m}{d\mu^{n-2}}\right)^2d\mu,$$

etc....

$$\int(1-\mu^2)\left(\frac{dR_m}{d\mu}\right)^2d\mu=(m+1)m\int R^2_m d\mu,$$

et de là,

$$\int(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2d\mu=(m-n+1)(m-n+2)\ldots.m+n.\int R^2_m d\mu.$$

Faisons $n=m$, on aura $\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2=(1.2.3\ldots.2m)^2$, et

$$\int R^2_m d\mu=1.2.3\ldots.2m\int(1-\mu^2)^m d\mu=\frac{2^{2m+1}\times(1.2\ldots.m)^2}{2m+1};$$

d'où enfin

$$\int(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2d\mu$$
$$=\frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m+n).(1.2.3\ldots m)^2\,2^{2m+1}}{2m+1}. \qquad (15)$$

Cela posé, considérons l'intégrale double $\int Z_m Y_{m'} d\mu d\varpi$, prise depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = +1$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$, $Y_{m'}$ étant une fonction de même forme que Z_m, ensorte que

$$Y_{m'} = b^{(0)} R_{m'} + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dR_{m'}}{d\mu} (a^{(1)} \sin\varpi + b^{(1)} \cos\varpi) \text{ etc.} \ldots$$

Si l'on a égard aux théorèmes (14) et (15), et aux résultats suivans :

$$\int \sin p\varpi \sin q\varpi . d\varpi = 0,$$
$$\int \sin p\varpi \cos q\varpi . d\varpi = 0,$$
$$\int \sin p\varpi \cos p\varpi . d\varpi = 0,$$
$$\int \sin^2 p\varpi d\varpi = \int \cos^2 p\varpi d\varpi = \pi,$$
$$\int d\varpi = 2\pi,$$

on verra que si m et m' sont différens,

$$\int Z_m Y_{m'} d\mu d\varpi = 0, \quad \text{et par suite,} \quad \int Z_m d\mu d\varpi = 0;$$

et que si $m' = m$,

$$\int Z_m Y_m d\mu d\varpi = \frac{2^{2m+1}(1.2.3\ldots m)^2 \pi}{2m+1}$$
$$\times \Sigma(A^{(n)} a^{(n)} + B^{(n)} b^{(n)})(m-n+1 . m-n+2 \ldots m+n);$$

le signe Σ s'étendant depuis $n=0$ jusqu'à $n=m$, et le premier terme de la somme $A^{(0)} a^{(0)} + B^{(0)} b^{(0)}$ devant être remplacé par $2B^{(0)} b^{(0)}$.

Si $Z_m = T^{(m)}$ et qu'on substitue pour $B^{(n)}$ et $A^{(n)}$ leurs valeurs données plus haut, on trouve ce théorème bien remarquable,

$$\int T^{(m)} Y_m d\mu d\varpi = \frac{4\pi Y'_m}{2m+1},$$

Y'_m étant ce que devient Y_m en accentuant μ, ou bien,

$$\int T^{(m)} Y'_m d\mu' d\varpi' = \frac{4\pi Y_m}{2m+1}. \qquad (16)$$

Formules pour l'attraction des sphéroïdes infiniment peu différens d'une sphère.

14. Supposons d'abord le point attiré extérieur au sphéroïde, et ce sphéroïde homogène, faisons $\rho = 1$. Soit $r' = a(1+\alpha y')$ l'équation de sa surface, α étant un très-petit coefficient dont nous négligerons le carré. Cela posé, nous aurons la valeur de V par la série (4), dans laquelle

$$V^{(m)} = \int T^{(m)} r'^{m+2} dr' d\mu' d\varpi'.$$

Intégrant par rapport à r', depuis $r'=0$ jusqu'à $r'=a(1+\alpha y')$, on trouve

$$V^{(m)} = \int T^{(m)} a^{m+3}\left(\frac{1}{m+3} + \alpha y'\right) d\mu' d\varpi'.$$

Si $m=0$, $T^{(0)}=1$, $V^{(0)} = \frac{4}{3}\pi a^3 + a^3\alpha \int y' d\mu' d\varpi'$; en général, $\int T^{(m)} d\mu' d\varpi' = 0$, et

$$V^{(m)} = a^{m+3}\alpha \int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi'.$$

Faisons $Q_m = \int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi'$, nous aurons

$$V^{(m)} = a^{m+3}\alpha Q_m.$$

y' ne contenant que μ' et ϖ', et $T^{(m)}$ étant une fonction entière et rationnelle des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, Q'_m le sera de même et satisfera à l'équation (9).

De cette valeur générale de $V^{(m)}$, on tire

$$V = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r} + \frac{a^3\alpha}{r} Q_0 + \frac{a^4\alpha}{r^2} Q_1 \ldots + \frac{a^{m+3}\alpha}{r^{m+1}} Q_m$$

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r^2} + \frac{a^3\alpha}{r^2} Q_0 + \frac{2a^4\alpha}{r^3} Q_1 \ldots + \frac{m+1\, a^{m+3}\alpha}{r^{m+2}} Q_m.$$

Le premier terme est, comme on voit, l'attraction d'une sphère d'un rayon égal à a, et les autres sont de l'ordre α. Les deux autres composantes de l'attraction du sphéroïde seraient aussi du même ordre, d'où il résulte qu'au carré près de α, toute l'attraction est exprimée $-\frac{dV}{dr}$.

Si le point attiré est à la surface du sphéroïde, alors $r=a(1+\alpha y)$, y étant ce que devient y' lorsqu'on y change μ' et ϖ' en μ et ϖ, et les formules sont alors

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2(1-\alpha y) + a^2\alpha(Q_0 + Q_1 + Q_2 \ldots)$$

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi a(1-2\alpha y) + a\alpha(Q_0 + 2Q_1 + 3Q_2 \ldots).$$

15. Traitons directement ce cas particulier. Nous avons

$$V=\int \frac{r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{u} \quad u^2=r^2-2rr'[\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)]$$

$$-\frac{dV}{dr}=\int \frac{r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{u^3}[r-r'(\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)].$$

On tire de ces expressions,

$$-2r\frac{dV}{dr}-V=\int\frac{r'^2dr'd\mu'd\varpi'}{u^3}(r^2-r'^2).$$

Cette intégrale doit être prise depuis $r'=0$ jusqu'à $r'=a$, et ensuite depuis $r'=a$ jusqu'à $r'=a(1+\alpha y')$. La première intégration suppose α nul; mais alors $V=\frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r}$ $-\frac{dV}{dr}=\frac{4}{3}\frac{\pi a^2}{r}$,

ensorte que la première partie de l'intégrale est égale à $\frac{4}{3}\frac{\pi a^2}{r^2}$.
Le reste de l'autre est égal, aux infiniment petits près de l'ordre α^2, à $a^3(r^2-a^2)\alpha\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{u^3}$.

En prenant le rayon r pour origine des μ', on a $u^2=a^2-2\mu'ar+r^2$,
et
$$\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{u^3}=\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{(a^2-2ar\mu'+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons $a=rt$, $t<1$, le reste de l'intégrale cherchée sera

$$a^2\alpha t(1-t^2)\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{(1-2t\mu'+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or $t=1$, aux quantités près de l'ordre α, de sorte que cette quantité sera évidemment du premier ordre en α, tant que μ' sera sensiblement différent de 1, ou, ce qui revient au meme, tant que y' différera sensiblement de y. Nous pouvons donc supposer toujours $y'=y$; mais alors

$$\frac{(1-t^2)}{t}\int\frac{d\mu'd\varpi'}{(1-2t\mu'+t^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi;$$

on aura donc $\quad -2r\frac{dV}{dr}=V+\frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r}+4\pi a^2\alpha y.$

Mettant pour r sa valeur $a(1+\alpha y)$, et observant que...... $-\frac{dV}{dr}=\frac{4}{3}\pi a^2$, aux quantités près de l'ordre α, on trouve

$$-\frac{dV}{ar}=\frac{V}{2a}+\frac{2}{3}\pi a.$$

Substituant dans cette équation les valeurs de V et de $-\frac{dV}{dr}$ données plus haut, on en tire

$$4\pi y=Q_0+3Q_1+5Q_2+\text{etc.}\ldots.(2m+1)Q_m\ldots;$$

Ainsi y se trouve essentiellement développé en une série de la forme $\quad y=Y^0+Y_1+Y_2,$

Y_m étant une fonction entière et rationnelle des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}$ satisfaisant à l'équation (9). Mais alors on a $Q_m = \int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi' = \frac{4\pi Y_m}{2m+1}$; et comme, par ce que nous avons vu sur les fonctions telles que $T^{(m)} Y_m$,

$$\int T^{(m)} Y'_{m'} d\mu' d\varpi' = 0,$$

il en résulte $\int T^{(m)} Y'_m d\mu' d\varpi' = \frac{4\pi Y_m}{2m+1}$, ce qui confirme le théorème (16).

Les valeurs de V et de $-\frac{dV}{dr}$, peuvent donc s'écrire ainsi :

$$V = \tfrac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r} + 4\frac{\pi a^3 \alpha}{r}\left[Y_0 + \frac{aY_1}{3r} + \frac{a^2 Y_2}{5r^2} \ldots \frac{a^m Y_m}{2m+1 \, . \, r^m} \ldots\right]$$

$$-\frac{dV}{dr} = \tfrac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r^2} + 4\frac{\pi a^3 \alpha}{r^2}\left[Y_0 + \frac{2aY_1}{3r} + \frac{3a^2 Y_2}{5r^2} \ldots \frac{m+1}{2m+1}\frac{a^m Y_m}{r^m}\right].$$

En prenant pour a le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, et pour origine son centre de gravité, Y_0 et Y_1 sont nuls. (Mécanique Céleste.)

Lorsqu'on connaîtra d'avance le développement de y, ces formules seront employables immédiatement. Mais dans le cas contraire, elles n'auront aucun avantage sur les précédentes, puisqu'on ne pourra calculer Y_0, Y_1, etc. que par les intégrales doubles $\int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi'$, etc.

Je termine ici mon Mémoire ; tout ce qui reste à dire se trouve dans la Mécanique Céleste, et je n'aurais rien à y changer ; je me bornerai seulement aux observations suivantes.

Les séries (4) et (5) peuvent s'appliquer à des corps quelconques et fournir une théorie de leurs attractions, *pourvu* qu'elles ne cessent pas d'être convergentes, et j'ai montré en quoi consistait leur convergence ou leur divergence. On trouve dans la Mécanique Céleste deux théorèmes généraux, l'un sur les solides de révolution, l'autre sur les solides symétriques, par rapport à trois axes, basés sur la considération de ces séries et sur les propriétés des fonctions Z_m relatives aux intégrales doubles. Pour que ces théorèmes soient certains, il faut ne les appliquer qu'à des corps pour lesquels les séries employées soient essentiellement convergentes, et de plus, qu'à des corps continus ; car les propriétés des fonctions Z_m relatives aux intégrales doubles, supposent les intégrales prises dans toute l'étendue des variables μ' et ϖ', ce qui ne pourrait plus avoir lieu si la forme du rayon changeait brusquement dans l'intervalle des limites de ces variables.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Note sur les tangentes aux sections planes de la surface engendrée par une ligne droite ; par M. Hachette.

J'ai démontré, dans le Supplément de la Géométrie descriptive de Monge (pag. 50, art. 58 et 59), que la surface la plus générale engendrée par la ligne droite, était touchée, suivant une génératrice, par une surface du même genre, que nous avons nommée *hyperboloïde à une nappe*, et qui jouit de cette propriété, qu'elle peut être engendrée par une ligne droite, de deux manières différentes, ensorte que le plan qui touche cette surface en un point, est déterminé par les deux droites qui se croisent en ce point. J'ai fait voir qu'on pouvait prendre pour directrices de la génératrice de l'hyperboloïde, trois droites menées dans les plans qui touchent la surface générale en trois points quelconques de la génératrice commune aux deux surfaces. Si l'on considère le point de cette génératrice qui appartient à une section plane de la surface générale, la tangente en ce point de la section, est évidemment la droite d'intersection du plan de la section et du plan tangent à l'hyperboloïde. Les droites directrices de la génératrice de l'hyperboloïde étant seulement assujéties aux conditions de passer par trois points en ligne droite de la surface générale, et d'être menées dans les plans tangens en ces mêmes points, l'objet de cette note est de faire remarquer qu'on peut prendre pour les directrices, des droites parallèles au plan de la section de la surface générale ; alors l'hyperboloïde à une nappe devient le paraboloïde hyperbolique, et la tangente à la section est nécessairement une droite de ce paraboloïde. On déduit de cette considération un moyen très-simple de mener les tangentes aux sections planes de plusieurs surfaces gauches employées dans la coupe des pierres, et notamment de celle qu'on engendre en prenant pour directrices de la droite mobile, deux cercles situés dans des plans parallèles, et une perpendiculaire à ces plans. Les petites voûtes qu'on nomme *biais passé*, *arrière-voussure de Marseille*, sont terminées par une surface de ce genre, dont les sections verticales forment les têtes de quelques-uns de leurs voussoirs. On construira facilement les tangentes de ces sections, par la méthode que nous venons d'indiquer, et qui se réduit à trouver une seule position de la génératrice du paraboloïde tangent à la surface gauche, qui termine la voûte.

Recherches sur un Jeu de combinaisons ; par C. J. Brianchon, *Capitaine d'artillerie, Adjoint au Directeur-général des manufactures d'armes.*

(Art. 1.) Les n billets, ou numéros, A, E, I, O,....U, dont se compose une loterie, étant tirés secrètement, et au hasard, par une société de n personnes, qui, chacune, en prennent un : nous allons faire voir par quel artifice on peut obtenir une certaine *donnée*, qui, seule, décèle tout le mystère de cette répartition et permet d'assigner ce qui est échu à chacun.

(Art. 2.)

Donnez à la	1re 2e ... ne	personne	J' J'' ... J^n	jetons ; et, en outre, mettez-en à la disposition de toutes une quantité suffisante D ; ensuite de quoi, vous expliquerez aux actionnaires que celui qui recèle le billet numéroté	A E ... U	doit prendre au tas D, et à votre insu,	K' K'' .... K^n	fois autant de jetons qu'il en a déjà reçus.

Après cette dernière opération, faite en votre absence, vous trouvez que, des D jetons que vous aviez laissés, il n'en reste plus que d. La connaissance seule de ce nombre d va nous conduire à la solution du problème.

3. En effet : le produit $1\times 2\times 3 \ldots\ldots \times n=m$, exprimant de combien de manières différentes on peut distribuer n choses entre n individus, $D-d$ n'est susceptible que de m valeurs dont on figurera le tableau en parcourant successivement tous les changemens d'ordre que peuvent subir les billets entre les sociétaires. Ainsi, la première de ces valeurs étant

$$K'J'+K''J''+\ldots\ldots+K^nJ^n,$$

on formera les $m-1$ autres en laissant à leurs places les coefficiens K, et en permutant les lettres J jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les arrangemens qu'elles peuvent avoir ; d'où l'on voit que chaque expression algébrique de $D-d$ se composera de la somme des n coefficiens K, ordonnés selon leurs accens, et multipliés, chacun, par l'un des termes J. Ce tableau, que, pour abréger, nous désignerons par T, indiquera, d'une part, tous les cas possibles de la répartition des n numéros ; de l'autre, il exprimera les relations qui lient la variable d aux constantes J, K, D.

Or, comme on est maître de ces dernières, on les choisira telles, que de toutes les valeurs résultantes de $D-d$, il n'y en ait pas deux qui soient numériquement égales. Par ce moyen, aussitôt qu'on sait quelle est la quantité d de jetons restans,

il suffit de jeter les yeux sur la formule T pour conclure quelle est la disposition des billets à l'égard des personnes.

4. Voici maintenant une méthode pour faire ce choix convenable des constantes.

Si l'on prend deux à deux toutes les expressions de $D-d$, en les soustrayant l'une de l'autre, on obtiendra $\frac{m(m-1)}{2}$ différences dont aucune ne devra s'annuler lorsqu'on y remplacera les signes J et K par les nombres qu'ils représentent, et toute hypothèse qui ferait évanouir une seule de ces différences ne serait pas admissible.

Donc, si l'on égale à zéro toutes les différences ainsi formées, et qu'on traite séparément chacune des équations résultantes, en y regardant comme variables celles des inconnues J et K qu'elle contient, l'ensemble de toutes les racines entières et positives de ces équations individuelles fera connaître les séries de nombres qu'il faut exclure dans les suppositions à faire sur ces inconnues. La difficulté se trouve ainsi ramenée à une discussion régulière d'analyse indéterminée.

5. Tout étant symétrique en J et K, lorsqu'on aura fixé les nombres $\frac{J}{K}$, on sera maître d'intervertir l'ordre des termes de chacune de ces deux suites, ou même de les substituer l'une à l'autre, sans que, pour cela, elles cessent d'être applicables, et sans qu'aucune des équations soit vérifiée.

6. Parmi ces équations, il s'en trouve de la forme $(J^{\alpha}-J^{6})(K^{\gamma}-K^{\delta})=0$, et celles-là sont en nombre $\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$; elles n'apprennent rien sur les valeurs absolues des quantités cherchées, mais elles montrent qu'on ne peut résoudre la question qu'en prenant les n termes $\frac{J}{K}$ tels qu'il n'y en ait pas deux qui soient égaux.

7. Telles sont les conditions générales auxquelles sont assujetties les $2n$ constantes J, K. Quant à D, qui du reste est arbitraire, il est évident que, pour chaque solution, il doit être au moins égal à la plus grande des valeurs numériques de $D-d$.

8. On peut égaler à zéro l'un des termes J, et en même tems l'un de ceux K, sans que T perde la propriété d'indiquer les arrangemens qui répondent aux valeurs données de $D-d$. Il est aisé de se rendre compte de ce fait en observant que, dès qu'on connaît les lots de $n-1$ actionnaires, ou

les rangs de $n-1$ billets, il n'y a plus d'incertitude sur le sort du $n^{ème}$.

9. La manière dont sont composées les équations mentionnées ci-dessus, montre, d'une part, que, si on veut limiter la multitude des solutions que comporte le problème, on peut disposer à volonté de tous les termes de l'un des systèmes $\frac{J}{K}$, en s'astreignant toutefois à les prendre différens entr'eux (§ 6); de l'autre, elle fait voir que si, à l'un de ces systèmes, on substitue, dans un ordre quelconque, les termes consécutifs d'une progression par différence, le nombre des équations se réduit à moitié. Nous remplacerons donc chaque coefficient K par l'un des n termes de cette progression

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots\ldots n-1;$$

toutes les équations s'abaissent alors d'un degré et deviennent linéaires.

10. Reste à statuer sur les quantités J, dont deux quelconques, J' et J'', par exemple, sont arbitraires, mais qui, toutes, doivent être distinctes (§ 6); les limites inférieures des $n-2$ autres sont des fonctions de n; et on en facilite beaucoup la recherche en supposant d'abord que, dans chaque système $\frac{J}{K}$, les lettres affectées des plus forts exposans représentent les plus grands nombres. D'après cette convention, faisant $J'=0$ (§ 8), $J''=1$, on reconnaît que, de toutes les valeurs de J''' qu'il faut exclure, la plus haute est donnée par l'équation

$$J'(K''-K^n)+J''(K^n-K')+J'''(K'-K'')=0,$$

dont la racine est $n-1$. Donc $J'''=n$ est admissible.

De même, la limite inférieure de J^{IV} se tire de

$$J'(K'-K^n)+J''(K'''-K'')+J'''(K^n-K')+J^{\text{IV}}(K''-K''')=0,$$

dont la racine est $1+n(n-1)$; d'où $J^{\text{IV}}=2+n(n-1)$.

En poursuivant, on trouve que

$$\begin{aligned}J'(K'-K^n)+J''(K''-K''')+J'''(K^{\text{IV}}-K'')+J^{\text{IV}}(K^n-K')\\+J^{\text{V}}(K'''-K^{\text{IV}})=0\end{aligned}$$

conduit à $J^{\text{V}}=2n+(n-1)[2+n(n-1)]$, et

$$\begin{aligned}J'(K'-K^n)+J''(K''-K''')+J'''(K'''-K'')+J^{\text{IV}}(K^{\text{V}}-K^{\text{IV}})\\+J^{\text{V}}(K^n-K')+J^{\text{VI}}(K^{\text{IV}}-K^{\text{V}})=0\end{aligned}$$

à $J^{\text{VI}}=n+2+n(n-1)+(n-1)\{2n+(n-1)[2+n(n-1)]\}$.

Ainsi des autres.

11. En adoptant ainsi une solution particulière, le tableau T peut être réduit au système des permutations des numéros, disposées selon la progression des valeurs de d, avec lesquelles elles sont appariées. Ces deux suites conjuguées, dont l'une est littérale et l'autre numérique, retraceront au premier coup d'œil toutes les circonstances du tirage des billets.

Et, puisqu'il suffit de connaître les lots de $n-1$ partenaires, on pourra supprimer la dernière lettre de chacun des groupes de la première série, qui, ne présentant plus alors que l'ensemble des combinaisons $n-1$ à $n-1$ des n numéros, donnera tous les arrangemens que peuvent prendre les billets à l'égard des $n-1$ premières personnes.

Nous allons appliquer cette théorie à quelques exemples qui fourniront autant de théorèmes particuliers propres à faire découvrir, par une seule interrogation, comment 3, 4, 5,..... choses quelconques ont été réparties entre 3, 4, 5, ... personnes, respectivement.

(Art. 12.)

Pour $n=3$, le système $\left|\begin{matrix} J \\ K \end{matrix}\right.$ est représenté par la série $\left|\begin{matrix} 0, 1, 3. \\ 0, 1, 2. \end{matrix}\right.$

Et, comme on est maître de transposer les termes (§ 5), nous prendrons

$$J'=1,\ J''=3,\ J'''=0,\quad \text{et},\quad K'=1,\ K''=2,\ K'''=0.$$

Le *maximum* de $D-d$ est alors égal à 7. Posant donc $D=8$ (§ 7), il vient, pour les six valeurs de d, classées par ordre de grandeur,

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 6,\quad 7,$$

et les combinaisons des trois billets, pris deux à deux (§ 11), sont respectivement

AE, IE, EA, IA, EI, AI;

d'où l'on tire cette règle : « Pour deviner comment trois numé-
» ros, A, E, I, ou trois objets quelconques, ont été distri-
» bués à trois individus,

» après	1er		1	cartes, ou jetons; dé-	A	prenne à ce	1	fois autant
» avoir	2e	action-	3	posez-en 8 autres, en	E	dépôt, et sans	2	de jetons
» donné		naire		prescrivant que celui qui		que vous		qu'il en a
» au	3e		0	a le billet	I	soyez témoin	0	déjà reçus.

» Cela fait, demandez ce qu'il reste des huit jetons; le nombre

» qu'on accusera étant nécessairement un de ceux que renferme *T*, » cherchez au tableau la permutation correspondante, et vous » saurez quel numéro chacun a pris. »

Je suppose qu'il reste cinq jetons. Le groupe IA placé, dans l'index *T*, en regard du nombre 5, m'apprend que, dans ce cas, les billets I, A sont tombés en partage aux première et deuxième personnes, respectivement.

Cette récréation mathématique est connue sous le nom de *Tour des trois bijoux*. On peut en varier l'exécution d'une infinité de manières, en modifiant convenablement les nombres *J*, *K*, *D*.

Pour jeter plus de merveilleux sur cette ingénieuse divination, et aussi pour soulager la mémoire, on a imaginé de lier les six couples de voyelles

AE IE EA IA EI AI

par ce vers hexamètre :

L'ART DE LIRE CELA DIRA CE QU'IL A PRIS,

scandé par la série :

1 2 3 5 6 7.

Cet artifice de Mnémonique réduit le tableau à une formule mentale qui ne laisse aucune prise à la pénétration des spectateurs.

(Art. 13.)

$$n = 4,\ \text{série}\ \left|\begin{array}{l} J\ldots 0,\ 1,\ 4,\ 14 \\ K\ldots 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{array}\right. \quad D = 52. \quad \begin{array}{l} J' = 1,\ J'' = 4,\ J''' = 14,\ J^{IV} = 0 \\ K' = 1,\ K'' = 2,\ K''' = 3,\ K^{IV} = 0 \end{array}$$

$$\overbrace{\hspace{20em}}^{\text{T.}}$$

1	2	4	6	8	9	11	12
AEI,	OEI,	EAI,	OAI,	EOI,	AOI,	AIE,	OIE,
17	20	21	23	24	26	27	30
IAE,	OAE,	IOE,	AOE,	EIA,	OIA,	IEA,	OEA,
35	36	38	39	41	43	45	46
IOA,	EOA,	EIO,	AIO,	IEO,	AEO,	IAO,	EAO,

Que, par exemple, 17 soit le nombre de jetons restans : le groupe IAE dénote que, dans ce cas, les numéros I, A, E sont échus aux première, deuxième et troisième personnes, respectivement.

(Art. 14.)

$$n = 5,\ \text{système}\ \left|\begin{array}{l} J\ldots 0,1,5,22,98. \\ K\ldots 0,1,2,\ 3,\ 4. \end{array}\right. \quad D = 470. \quad \begin{array}{l} J' = 1,\ J'' = 5,\ J''' = 22,\ J^{IV} = 98,\ J^{V} = 0 \\ K' = 1,\ K'' = 2,\ K''' = 3,\ K^{IV} = 4,\ K^{V} = 0 \end{array}$$

T.

1 AEIO,	2 UEIO,	5 EAIO,	7 UAIO,	10 EUIO,	11 AUIO,	18 AIEO,	19 UIEO,
26 IAEO,	29 UAEO,	31 IUEO,	33 AUEO,	39 EIAO,	41 UIAO,	43 IEAO,	46 UEAO,
53 IUAO,	54 EUAO,	61 EIUO,	62 AIUO,	65 IEUO,	67 AEUO,	70 IAUO,	71 EAUO,
77 AEOI,	78 UEOI,	81 EAOI,	83 UAOI,	86 EUOI,	87 AUOI,	111 AOEI,	112 UOEI,
123 OAEI,	127 UAEI,	128 OUEI,	131 AUEI,	132 EOAI,	134 UOAI,	140 OEAI,	144 UEAI,
150 OUAI,	152 EUAI,	154 EOUI,	155 AOUI,	162 OEUI,	165 AEUI,	167 OAUI,	169 EAUI,
170 AIOE,	171 UIOE,	178 IAOE,	181 UAOE,	183 IUOE,	185 AUOE,	187 AOIE,	188 UOIE,
199 OAIE,	203 UAIE,	204 OUIE,	207 AUIE,	229 IOAE,	232 UOAE,	233 OIAE,	237 UIAE,
248 OUAE,	249 IUAE,	251 IOUE,	253 AOUE,	255 OIUE,	258 AIUE,	265 OAUE,	266 IAUE,
267 EIOA,	269 UIOA,	271 IEOA,	274 UEOA,	281 IUOA,	282 EUOA,	284 EOIA,	286 UOIA,
292 OEIA,	296 UEIA,	302 OUIA,	304 EUIA,	305 IOEA,	308 UOEA,	309 OIEA,	313 UIEA,
324 OUEA,	325 IUEA,	349 IOUA,	350 EOUA,	353 OIUA,	355 EIUA,	358 OEUA,	359 IEUA,
365 EIOU,	366 AIOU,	369 IEOU,	371 AEOU,	374 IAOU,	375 EAOU,	382 EOIU,	383 AOIU,
390 OEIU,	393 AEIU,	395 OAIU,	397 EAIU,	403 IOEU,	405 AOEU,	407 OIEU,	410 AIEU,
417 OAEU,	418 IAEU,	425 IOAU,	426 EOAU,	429 OIAU,	431 EIAU,	434 OEAU,	435 IEAU.

Prenons que, des 470 jetons, il n'en reste que 87; les billets A, U, O, I sont alors entre les mains des première, deuxième, troisième et quatrième personnes, respectivement; conséquemment, la cinquième est en possession du billet E.

15. La personne qui exécute le tour doit être secrètement munie du tableau T, qui est la clef de l'opération. Il est facile de donner à ce tableau une forme telle qu'on puisse le consulter ostensiblement sans que l'assemblée en découvre le sens. Dans tous les cas, une seule interrogation fera discerner l'arrangement de billets qui a eu lieu.

Au-delà de cinq numéros, la complication des calculs rendrait impraticable ce jeu de combinaison. Telle sera donc la limite de nos recherches. Il nous suffit d'avoir prouvé que, pour toutes les valeurs de n, la difficulté est accessible et résoluble; ensorte que, par exemple, pour $n=12$, au milieu de plus de quatre cent millions d'événemens, tous également possibles, on démêlera le véritable, à l'aide seulement du nombre d, qui est l'unique donnée du problème.

GÉOMÉTRIE.

Théorème. Si l'on construit la développante d'un arc de cercle, puis la développante de cette développante, et ainsi de suite; la série infinie, composée de l'arc de cercle et de ses développantes successives, peut être sommée par un arc fini de spirale logarithmique.

Démonstration. Soient t et u les coordonnées polaires d'un point de la spirale logarithmique dont l'équation est $t = l.u$, ou $u = e^t$, t étant un arc du rayon 1, u le rayon vecteur correspondant à t, et e la base des logarithmes Nepériens. On a pour l'équation différentielle de la spirale :

$$\frac{udt}{du} = 1,$$

et pour l'élément de cette courbe,

$$\sqrt{u^2dt^2 + du^2}, \quad \text{ou} \quad du\sqrt{2},$$

dont l'intégrale est $u\sqrt{2}$ + const. Quand l'arc de spirale est nul, $u = 1$, et le rayon de courbure $= \sqrt{2}$. (*Voyez* le Traité du grand Calcul différentiel de M. Lacroix, page 483, et l'article de M. Poinsot, page 131 de ce volume de la Correspondance). D'où il suit que la constante égale $-\sqrt{2}$, et que l'arc fini de spirale logarithmique correspondant à l'arc de cercle t, est

$$(u - 1)\sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad (e^t - 1)\sqrt{2}.$$

Mais on sait (Voyez l'article de M. Poinsot, page 245 du premier volume de la Correspondance) qu'en nommant t un arc de cercle du rayon 1; t', t'', t'''.... les développantes successives, on a

$$t + t' + t'' + t'''.....+ \text{etc.} = e^t - 1;$$

d'où il suit que cette somme est égale au quotient qu'on obtient en divisant par $\sqrt{2}$, ou par le rayon de courbure de la spirale qui correspond au rayon vecteur 1, l'arc de spirale logarithmique compris entre les rayons vecteurs qui passent par les extrémités de l'arc de cercle t. (*Cet article est extrait d'un Mémoire de M. Dubois-Aimé, ancien élève, membre de la Commission d'Egypte.*)

Théorème. Si, par un point donné, on mène trois plans perpendiculaires entr'eux, qui coupent la surface d'une sphère, la somme des aires des trois sections circulaires sera constante, quelle que soit la position des plans coupans.

Démonstration. Soient x', y', z' les coordonnées du point donné rapportées à trois plans rectangulaires parallèles aux trois plans coupans, et $x^2+y^2+z^2=R^2$ l'équation de la sphère; les équations des plans coupans seront

$$x=x',\qquad y=y',\qquad z=z'.$$

Les rayons r, r', r'' des sections circulaires ont pour expressions:

$$r=\sqrt{R^2-x'^2},\qquad r'=\sqrt{R^2-y'^2},\qquad r''=\sqrt{R^2-z'^2},$$

la somme des aires est, en appelant π le rapport de la circonférence au diamètre,

$$\pi(r^2+r'^2+r''^2),\ \text{ou}\ \pi[3R^2-(x'^2+y'^2+z'^2)],$$

quantité constante qui exprime l'aire d'un cercle dont le rayon est

$$\sqrt{3R^2-(x'^2+y'^2+z'^2)}.$$

(*Ce théorème est extrait de la Géométrie de position*, *pag.* 167.)

Propriétés des surfaces du second degré ; par M. Fregier, *ancien élève.*

M. Fregier résout d'abord ce problème :

« Avec une équerre pour tout instrument, mener une tan-
» gente à une section conique, par un point pris sur la courbe. »

Il fait passer par le point de contact deux droites quelconques perpendiculaires entr'elles, et il suppose que le point de contact étant fixe, les deux droites tournent autour de ce point; chaque couple de droites rencontre la courbe en deux points, par lesquels on mène une corde. On prouve que, *toutes les cordes déterminées de la même manière, viennent se couper en un seul point qui est sur la normale.* La normale étant connue, la tangente l'est aussi.

Cette proposition a son analogue pour les surfaces du second degré, ce qui donne lieu au théorème suivant :

Trois droites rectangulaires se meuvent dans une surface du second degré, en se coupant toujours sur un point fixe de cette surface; *les plans menés par les intersections déterminées sur la même surface par chaque système de droites rectangulaires, viennent concourir en un point;* le sommet du cône circonscrit suivant la courbe déterminée par chacun de ces plans, engendre une surface plane.

M. de Stainville, Répétiteur-Adjoint à l'Ecole Polytechnique, et M. Lambert, Professeur de Mathématiques au Lycée de Bourges, ont envoyé plusieurs articles intéressans, qui ne pourront paraître que dans les prochains cahiers de la Correspondance.

§ II. SCIENCES PHYSIQUES.

Rapport fait à l'Institut, par M. Poisson, sur un Mémoire de M. HACHETTE, *relatif à l'écoulement des fluides par des orifices en minces parois, et par des ajutages appliqués à ces orifices.*

Le travail de M. Hachette peut être divisé en trois parties : l'une a pour objet de mesurer la contraction de la veine fluide dans le cas d'une mince paroi; l'autre traite de la cause des singuliers phénomènes que présentent les ajutages cylindriques ou coniques; enfin dans la troisième, l'auteur décrit la figure de la veine fluide, et les variations qu'elle éprouve pour différentes formes de l'orifice. Nous ne nous arrêterons pas à faire sentir toute l'importance de ces diverses questions, soit dans la pratique, soit par rapport à la théorie de l'écoulement des fluides; et sans autre préambule, nous allons analyser successivement les trois parties du Mémoire que la Classe a renvoyé à notre examen.

PREMIÈRE PARTIE. *Contraction de la Veine fluide.*

L'auteur examine d'abord si la figure de l'orifice en mince paroi influe sur la quantité de l'écoulement en un tems donné. C'est un principe généralement admis qu'à pression égale et l'aire de l'orifice restant la même, la dépense ne varie pas. M. Hachette en vérifie l'exactitude dans le cas où l'orifice est circulaire, triangulaire, elliptique, ou formé d'un arc de cercle et de deux lignes droites; mais il trouve des produits très-différens en plus ou en moins, lorsque le contour de l'orifice présente des angles rentrans; ce qui apporte une modification importante au principe que nous citons. Il considère ensuite d'une manière spéciale, le cas d'un orifice circulaire. Si le plan dans lequel il est percé n'est pas horizontal, la veine fluide forme une courbe qui doit être une parabole, correspondante à une certaine vitesse initiale que l'auteur a déterminée par des mesures directes. A partir de l'endroit de la plus grande contraction, l'épaisseur devient constante dans une grande étendue, c'est-à-dire jusqu'à ce que le jet, en se mêlant à l'air, finisse par se déformer; dans cette étendue les molécules fluides décrivent toutes la même courbe, et la veine ressemble à un cristal parfaitement pur que l'on croirait immobile : il a donc été facile de mesurer les abscisses et les ordonnées de différens points d'un même filet, et par la comparaison de ces mesures, l'auteur a reconnu que la courbe fluide ne s'écarte pas

sensiblement de la parabole. Il en a également conclu par les formules connues du mouvement parabolique, la vitesse du fluide en un point déterminé, par exemple, à l'endroit de la plus grande contraction. Il a trouvé, de cette manière, que la vitesse commune à tous les points de la section contractée, est, à très-peu près, la vitesse due à la hauteur du niveau du fluide au-dessus de l'orifice. Ainsi le théorème de Toricelli est exact quand on le rapporte à la vitesse qui a lieu à cette section de la veine; mais il ne saurait être vrai, en même tems, par rapport à la vitesse moyenne des molécules qui traversent la section de l'orifice, à cause de la différence entre les aires de ces deux sections.

La vitesse à la section contractée étant connue, l'observation de la dépense, en un tems donné, fera aussi connaître le rapport de cette section à celle de l'orifice, ou ce qu'on appelle la *quantité de la contraction*, plus exactement que par des mesures directes. On comptera le tems et on mesurera le produit de l'écoulement, par un petit orifice et sous une pression constante; on calculera en même tems par la règle de Toricelli la quantité d'eau qui devrait être fournie par cet orifice; le rapport de la dépense observée à la dépense calculée, sera une fraction qui exprimera la quantité de la contraction. Cette méthode prescrite par D. Bernoulli, est celle que M. Hachette a suivie. Il n'a négligé d'ailleurs aucune des précautions nécessaires pour atténuer les erreurs des observations; il a mesuré le tems au moyen d'une montre à secondes de M. Breguet; les orifices qu'il a employés ont été exécutés et mesurés par M. Lenoir; par l'inspection d'un tube communiquant, il s'est toujours assuré que le niveau du fluide ne variait pas pendant toute la durée de chaque expérience; enfin ses expériences ont été faites très en grand, soit par rapport aux dimensions de la cuve et au volume d'eau qui s'en écoule, soit par rapport au tems de l'écoulement qui a duré quelquefois plus d'une heure: un tableau placé à la fin de son Mémoire présente les resultats de 28 expériences faites de cette manière, sur des hauteurs d'eau comprises entre 135 et 888 millimètres, et pour des orifices dont les diamètres varient depuis 1 jusqu'à 41,3 millim. La moindre contraction observée par l'auteur répond au plus petit diamètre; elle est de 0,78. Pour les diamètres au-dessus de 10^{mm}, la contraction devient presque constante; elle reste comprise entre 0,60 et 0,63. A égalité d'orifice, elle augmente un peu avec la hauteur du fluide, et au contraire il ne paraît pas qu'elle dépende de la direction du jet.

Les autres physiciens qui ont déterminé la contraction de la veine, diffèrent sensiblement entr'eux sur sa grandeur; Newton, par exemple, l'évalue à 0,70; Borda a trouvé 0,61, et dans un

certain cas, il a vu l'aire de la veine contractée, se réduire à près de moitié de l'aire de l'orifice. Sans doute cette discordance entre de si habiles observateurs doit être attribuée en partie aux grandeurs des orifices et des pressions qu'ils ont employés; mais M. Hachette indique une autre cause que D. Bernoulli avait déjà aperçue, et qui doit avoir une influence notable sur la quantité de la contraction déduite de la dépense observée. Cette cause est la forme de la surface dans laquelle l'orifice est percé : selon M. Hachette, la dépense est la plus petite, toutes choses d'ailleurs égales, lorsque la paroi en contact avec le fluide est convexe; la dépense augmente quand la paroi devient plane, et elle augmente encore, si la paroi se change en une surface concave. Ainsi, il a remarqué que la dépense varie de près d'un 20^e, en retournant simplement le disque de cuivre sur lequel est percé l'orifice circulaire en mince paroi, et qui est plan d'un côté et un peu concave de l'autre.

M. Hachette se propose de continuer ses expériences sur l'écoulement des fluides par de petits orifices, en variant toutes les circonstances qui peuvent influer sur la dépense en un tems donné, et en cherchant à découvrir les lois de leur influence. Il se propose aussi de les étendre aux vases cylindriques qui se vident par de grands orifices horizontaux; alors le tems de l'écoulement ne peut plus être déterminé par le théorème de Toricelli qui suppose l'orifice très-petit : son expression rigoureuse dépend, dans chaque cas, de deux transcendantes de l'espèce de celles que M. Legendre a nommées des fonctions *gamma*, et dont il a donné des Tables fort étendues dans ses Exercices de Calcul intégral. Au moyen de ces Tables, on pourra donc calculer le tems de l'écoulement par un orifice dont le diamètre est telle fraction qu'on voudra de celui du cylindre; ce qui permettra de comparer sous ce ce point de vue important, la théorie à l'observation.

DEUXIÈME PARTIE. *Augmentation de la Dépense par les ajutages cylindriques ou coniques.*

Ce phénomène était déjà connu des Romains, qui n'en avaient pas sans doute une appréciation exacte. Au commencement du siècle dernier, Poleni, professeur à Pavie, en donna la mesure dans un cas très-simple, celui d'un ajutage cylindrique, d'une longueur égale à environ trois fois le diamètre de l'orifice; il fit voir qu'alors la dépense est augmentée d'un tiers, ensorte que si elle est exprimée par 100 en mince paroi, elle devient 133, dans le même tems, au moyen de l'ajutage. Dans un ouvrage publié en 1797, M. Venturi, de Modène, a montré qu'en em-

ployant un ajutage composé d'un cylindre d'une certaine longueur, terminé par deux cônes dont il a fixé les dimensions, on pouvait augmenter la dépense dans le rapport de 12 à 5, c'est-à-dire, à peu près d'une fois et demie ce qu'elle est en mince paroi; et il ne paraît pas que ce physicien ait encore atteint le *maximum* d'effet dont les ajutages sont susceptibles; car M. Clément est parvenu à augmenter encore notablement la dépense, en changeant la forme de l'appareil de M. Venturi. Ces expériences, celles qui sont rapportées dans l'Hydro-dynamique de D. Bernoulli et celles de beaucoup d'autres physiciens que nous ne rappellerons pas ici, ont mis le phénomène des ajutages tout-à-fait hors de doute. Il est également constant que cette augmentation de dépense est due à ce que le fluide coule à plein tuyau dans l'ajutage, ce qui fait disparaître la contraction de la veine, et la change même en une dilatation dans le cas de l'ajutage conique; mais jusqu'à présent on n'a pas expliqué d'une manière satisfaisante pourquoi le fluide remplit ainsi le tuyau qu'on adapte à un orifice en mince paroi. M. Hachette en trouve la cause unique ou du moins la cause principale, dans l'adhésion du fluide aux parois de l'ajutage, c'est-à-dire, dans la force qui produit les phénomènes capillaires et d'autres phénomènes analogues (1). Voici les expériences qu'il a faites pour démontrer cette proposition.

Première Expérience. Le fluide en mouvement était du mercure; l'ajutage était en fer. Quand le mercure était parfaitement pur, il n'avait aucune affinité pour le fer, et il s'écoulait comme il aurait fait en mince paroi, ou comme si le tuyau n'existait pas. Quand au contraire le mercure était sali par une pellicule formée d'un alliage d'étain et d'autres métaux, cet alliage étamait l'intérieur de l'ajutage, et dans ce cas le mercure coulait à plein tuyau.

Deuxième Expérience. Le fluide était l'eau; l'ajutage était enduit de cire. Lorsque la cire était parfaitement séchée, l'ajutage ne se remplissait pas et l'eau coulait comme en mince paroi. Mais

---

(1) ***Opinion des anciens sur la cause des effets produits par les ajutages.***

M. Venturi a mis en note (pag. 23 de son ouvrage) que Gravesande et d'autres ont attribué à la cohésion naturelle des particules d'eau, l'augmentation de dépense dans les tuyaux additionnels descendans, et il observe que cette cause y entre pour bien peu de chose. Antérieurement, Bossut, Dubuat avaient expliqué l'effet des ajutages par la viscosité de l'eau, la résistance du fluide contenu dans l'ajutage, et l'obliquité des filets qui frappent les parois de cet ajutage. A cette époque, les phénomènes capillaires étaient à peine connus, et jusqu'à présent on ne les avait pas distingués dans le mouvement des fluides, de ce qui appartient à la mécanique proprement dite. Aussi M. Bossut lui-même a-t-il cru devoir accueillir une hypothèse différente de la sienne, présentée par M. Venturi, comme on le voit par la conclusion du rapport fait à l'Institut le 7 septembre 1797. H. C.

il est toujours possible de forcer l'eau de mouiller la cire ; alors l'eau coule à plein tuyau, ce qui tient à ce que l'enduit de cire se trouve pour ainsi dire remplacé par la première couche d'eau qui s'y est attachée. C'est ainsi qu'un disque de verre finit par adhérer avec la même force à la surface de l'eau, qu'il soit ou non enduit d'une légère couche de cire ; car une fois que le disque est mouillé, ce n'est plus que l'action de l'eau sur l'eau qui détermine le phénomène, ainsi que M. Laplace l'a expliqué dans la Théorie de l'Action capillaire.

Un autre fait non moins important que M. Hachette a aussi constaté, c'est que dans le vide ou dans l'air raréfié à un certain degré, le phénomène des ajutages cesse d'avoir lieu (1). Ainsi ayant fait couler l'eau à plein tuyau par un ajutage, sous le récipient de la machine pneumatique, et ayant raréfié l'air dans ce récipient, l'auteur a vu la veine fluide se détacher des parois de l'ajutage, lorsque la pression intérieure a été réduite à 23 centimètres de mercure, la pression extérieure étant $0^m,76$. En diminuant ainsi la pression intérieure, on augmente l'effet de la pression extérieure qui se transmet sur l'ajutage par l'intermédiaire du fluide contenu dans le vase et à laquelle s'ajoute la pression de ce fluide ; or il arrive un point où la somme de ces deux pressions devient assez grande pour détacher la veine fluide des parois de l'ajutage, de la même manière qu'une force suffisante détache un disque de la surface d'un fluide à laquelle il était adhérent (2).

---

(1) *Sur l'écoulement dans le vide.*

On ne doit pas confondre cette expérience avec celle qui est rapportée pag. 15 de l'ouvrage de M. Venturi. Ce physicien dit qu'après avoir placé sous un récipient de machine pneumatique où l'éprouvette ne marquait que 10 lignes (23 millimètres) de pression, un vase auquel était adapté un ajutage cylindrique, il avait observé que les tems d'abaissement du niveau du liquide dans le vase, ont été les mêmes que si l'écoulement avait eu lieu en plein air et *par un orifice en mince paroi plane, de même diamètre que l'ajutage.*

Ce fait étant admis, M. Venturi a cru devoir attribuer la cause des effets produits par les ajutages, à l'action du milieu où se fait l'écoulement. Il n'a pas remarqué que le contact du liquide et des parois de l'ajutage, doit précéder la sortie de l'eau, pour qu'il y ait écoulement à plein tuyau. J'ai vérifié plusieurs fois que les écoulemens par des orifices en mince paroi ou par des ajutages, se font dans des tems qui ne varient pas sensiblement, quel que soit le milieu qui environne le vase et ses ajutages, et que le liquide peut couler à plein tuyau par un ajutage conique au *maximum* de divergence, dans le vide comme dans l'air. H. C.

(2) J'ai répété la même expérience dans l'air atmosphérique. La veine fluide ne s'est détachée des parois de l'ajutage, que sous la pression d'une colonne d'eau dont la hauteur rapportée à une verticale, était de 22,8 mètres ; en sorte que la différence des pressions supérieure et inférieure était de (22,8—10,33) ou de 1247 centimètres en eau, ou 91 centimètres en mercure. La conduite d'eau n'étant pas verticale, on ne peut rien conclure d'exact sur la pression réelle de la colonne d'eau en mouvement. Je dispose un appareil pour mesurer exactement la pression qui détache la veine fluide des parois de l'ajutage, et dans le vide et dans un air plus ou moins condensé. H. C.

Ce que présente l'écoulement dans le vide ou dans l'air raréfié se concilie donc parfaitement avec la proposition de M. Hachette, et ne prouve pas, comme on pourrait le croire, que les phénomènes des ajutages soient dus à la pression de l'air dans lequel ce fluide s'écoule; opinion qui serait d'ailleurs en contradiction évidente avec les deux expériences que nous venons de citer; car dans ces expériences l'action de l'air était la même, et cependant les phénomènes ont été différens selon la nature du fluide et la matière de l'ajutage.

Lorsqu'après avoir détaché la veine fluide par la raréfaction de l'air, comme nous venons de le dire, on fait rentrer l'air sous le récipient, M. Hachette a remarqué que l'eau ne recommence point à couler à plein tuyau, c'est-à-dire que la contraction de la veine qui s'était formée dans l'air raréfié, continue de subsister, quoique la tension barométrique soit redevenue la même qu'auparavant. Cela conduisit à penser, en raisonnant toujours dans l'opinion de l'auteur, que l'adhésion du fluide et de la paroi de l'ajutage ne se produit que dans le premier instant du mouvement, avant que le fluide ait acquis une vitesse sensible dont la direction s'écarte de la paroi. Pour vérifier cette conjecture, M. Hachette fit l'expérience suivante qui sera la dernière que nous citerons.

L'eau coulait à plein tuyau par un ajutage hors du récipient de la machine pneumatique. On a pratiqué une petite ouverture à ce tuyau, assez près de l'orifice. L'air extérieur est entré ensuite dans le tuyau, comme cela devait arriver d'après la théorie (1) de D. Bernoulli; il s'est interposé entre l'eau et la paroi de l'aju-

---

(1) *Mesure de la pression négative dans l'ajutage conique.*

D'après cette théorie (de Bernoulli), les parois d'un ajutage conique éprouvent pendant l'écoulement à plein tuyau, une pression intérieure moindre que la pression extérieure de l'atmosphère. J'ai mesuré la différence de ces deux pressions que j'appelle *pression négative*, au moyen d'un tube en verre à deux branches verticales parallèles, coudées dans la partie inférieure. L'une de ces branches était courbée dans sa partie supérieure, pour s'adapter à la paroi de l'ajutage. Ayant d'abord mis du mercure dans le tube, on a achevé de remplir la branche courbée avec do l'eau, de sorte que l'eau de cette branche communiquait directement avec celle qui s'écoulait par l'ajutage conique. Le mercure s'est élevé dans cette même branche pendant l'écoulement à niveau constant, et j'ai conclu que la hauteur de la colonne d'eau qui mesurait la différence des pressions, correspondait à très-peu près, à la hauteur génératrice de la vitesse que l'eau prend dans l'ajutage conique au point de l'insertion du tube dans cet ajutage. Ce résultat ne s'accordait pas encore avec la proposition de M. Venturi, (pag. 16 de son ouvrage). C'est par cette raison que j'ai dû répéter plusieurs fois la même expérience, et je ne crois pas m'être trompé sur la conclusion que j'en ai tirée. Suivant M. Venturi, l'eau prendrait au point d'insertion du tube, une vitesse mesurée par la *pression négative*, augmentée de la hauteur du niveau constant au-dessus de l'orifice. Cependant je dois faire remarquer que le résultat de sou expérience 15e pag. 27, confirme ma conclusion. H. C.

tage; la contraction de la veine s'est formée dans l'intérieur du tube, et l'eau a cessé de couler à plein tuyau. Cela étant, on a refermé exactement l'ouverture qu'on avait faite : l'adhésion de l'eau et du tube ne s'est pas reproduite, et le mouvement a continué comme si le tube n'existait pas, de sorte qu'on aurait pu l'enlever ou le rétablir, sans rien changer au mouvement. Cette expérience réussit également quelle que soit la direction du jet; mais il faut avoir soin de ne point agiter l'appareil, car un très-petit mouvement latéral de la veine fluide détermine de nouveau son adhésion avec la paroi déjà mouillée de l'ajutage, et c'est peut-être pour avoir négligé cette précaution, que M. Venturi, à la page 13 de son ouvrage, énonce un résultat qui paraît contraire à celui de M. Hachette.

TROISIÈME PARTIE. *Figure de la Veine fluide.*

Nous avons peu de chose à dire sur cette troisième partie qui appartient entièrement à la Géométrie descriptive. C'est celle où M. Hachette s'est principalement aidé de deux collaborateurs qu'il s'est adjoints dans tout son travail, M. Girard, dessinateur à l'Ecole Polytechnique, et M. Olivier, ancien élève de cette même Ecole et maintenant officier d'artillerie. On y trouve la description des différentes formes que présente la veine fluide pour certaines figures de l'orifice. Des dessins construits sur une très-grande échelle et joints au Mémoire, représentent la courbe de la veine et quelques-unes de ses sections, dont les points ont été relevés par un procédé susceptible d'une exactitude suffisante qu'il serait difficile et superflu d'expliquer.

Nous avons indiqué, dans cette analyse du Mémoire de M. Hachette, la plupart des expériences nouvelles qui lui sont dues, soit sur la contraction de la veine, soit sur le phénomène des ajutages, et nous avons fait connaître la théorie de ce phénomène à laquelle ces expériences l'ont conduit. La Classe a pu voir par cet exposé ce que l'auteur a ajouté aux découvertes de ses prédécesseurs dans cette partie importante de la mécanique des fluides, et elle a pu juger, en même tems, de ce qui lui resterait à faire pour perfectionner le travail qu'il a entrepris. Nous pensons qu'en engageant M. Hachette à continuer ce genre de recherches, la Classe doit approuver son Mémoire et en arrêter l'impression dans le *Recueil des Savans Etrangers*.

5 Février 1816.

Signé AMPÈRE, GIRARD et POISSON, Commissaires.

La Classe approuve le Rapport et en adopte les conclusions.

CHIMIE.

Du Cyanogène, ou du radical de l'Acide prussique.

Ce nouveau produit, trouvé par M. Gay-Lussac, est formé d'azote et de carbone; il existe dans une substance connue depuis long-tems, que M. Guyton-Morveau avait nommée *acide prussique*. A l'époque où l'on adopta cette dénomination, on croyait que tous les acides provenaient nécessairement d'une combinaison de l'oxigène et d'une base acidifiable. Depuis on a mis dans la classe des acides, des substances qui ne contiennent pas d'oxigène; l'acide prussique est de ce nombre. M. Berthollet, en 1787 (Annales de Chimie, t. I), le regardait comme une combinaison de carbone, d'azote et d'hydrogène. Clouet l'avait obtenu (Annales de Chimie, tome XI, page 30, année 1791) par un procédé, autre que celui décrit par Scheele, dans ses Mémoires (année 1782), et qui confirmait l'opinion de M. Berthollet, puisqu'il consiste à faire passer le gaz ammoniacal sur du charbon incandescent. Clouet avait essayé inutilement de combiner le charbon avec l'un des principes de l'ammoniaque. M. Gay-Lussac a d'abord trouvé, par une analyse exacte, que cent parties en poids d'acide prussique, contiennent:

1°.....	44,39 de vapeur de carbone.	Total, 100 parties.
2°.....	51,71 d'azote.	
3°.....	3,90 d'hydrogène.	

La composition de ce gaz s'exprime plus simplement en volumes. Un volume 2 est formé par contraction, d'un volume 2 de vapeur de carbone, d'un volume 1 d'azote et d'un même volume 1 d'hydrogène. Cette composition, conforme à la loi la plus générale et la plus importante de la Chimie moderne, fait voir que la contraction est la moitié des volumes élémentaires; d'où il suit qu'un volume 1 d'acide prussique est composé des volumes de *vapeur de carbone*, d'hydrogène et d'azote, exprimés par les nombres 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Le carbone ne se convertissant pas en vapeur par l'action seule du calorique, on peut demander ce que M. Gay-Lussac entend par *vapeur de carbone*? Pour répondre à cette question, on considère un volume de gaz acide carbonique comme étant formé de deux volumes, l'un d'oxigène et l'autre de *vapeur de carbone*, contractés à moitié du volume total. Dans cette hypothèse, on cherche la densité de la vapeur de carbone de la manière suivante: la den-

sité de l'air étant 1, celle de l'oxigène est 1,1036, et celle du gaz acide carbonique 1,5196. Ces nombres expriment les poids de ces deux gaz sous un volume pris pour unité. Le poids d'un volume égal de vapeur de carbone aura donc pour expression (1,5196 — 1,1036) = 0,416, pesanteur spécifique de cette vapeur. — Pour calculer la pesanteur spécifique P de l'acide prussique, il suffira de savoir que celles de l'azote et de l'hydrogène sont exprimées par les nombres 0,9691 et 0,0732 (l'air étant 1), et on aura

$$P = 0{,}416 + \frac{1}{2}(0{,}9691) + \frac{1}{2}(0{,}0732)$$
$$P = 0{,}416 + 0{,}4845 + 0{,}0366,$$
ou
$$P = 0{,}93715;$$

nombre qui ne diffère en moins de celui qu'on trouve par l'expérience, que d'un centième d'unité.

Pour un autre poids $P' = 1$, on aurait, comme M. Gay-Lussac,

$$\text{Vapeur de carbone} = \frac{416}{937} = 0{,}4439,$$
$$\text{Azote} = \frac{4845}{9371} = 0{,}5171,$$
$$\text{Hydrogène} = \frac{36{,}6}{937} = 0{,}0390.$$

Total..... 1,0000.

M. Gay-Lussac a combiné l'acide prussique avec le potassium, et en a dégagé l'hydrogène; il a obtenu un produit formé du potassium et d'un nouveau radical dont les élémens sont l'azote et le carbone. C'est ce radical qu'il a nommé *cyanogène* (*), et il désigne ses combinaisons par le mot générique *cyanure*. On suppose un volume égal de cyanogène formé d'un volume d'azote et de deux volumes égaux de vapeur de carbone, la contraction étant $\frac{1}{3}$ du volume total. Dans cette hypothèse, on a pour sa pesanteur spécifique C,

$$C = 0{,}9691 + 2(0{,}416) = 1{,}8011.$$

La pesanteur spécifique observée est 1,8064. Cet accord entre le calcul et l'observation sera un des beaux résultats de la Chi-

(*) Ce mot veut dire *produisant du bleu*.

mie moderne. (Voyez le Mémoire de M. Gay-Lussac, sur la combinaison des substances gazeuses, décembre 1809, Nouveau Bulletin de la Société Philomatique, tome I, page 298.)

Le cyanogène, combiné avec l'hydrogène, donne l'acide prussique, du genre des *hydracides ;* on le désigne par ces mots : *acide hydro-cyanique.*

Cette nomenclature s'applique aux découvertes faites par le même chimiste sur le chlore et l'iode. Le chlore se nommait autrefois *acide muriatique oxigéné ;* on le regarde actuellement comme une substance simple qui, par sa combinaison avec l'hydrogène et l'oxigène, donne les acides muriatique et muriatique sur-oxigéné, ou les acides hydro-chlorique et chlorique. On a de même deux acides qui ont pour base l'iode, savoir, les acides iodique et hydriodique.

H. C.

Extrait des Annales de Chimie (tom. 96, novembre 1815, pag. 135); sur la conversion du fer en acier fondu par le diamant.

M. Mushet répéta l'expérience faite à l'Ecole Polytechnique (par MM. Clouet, Welter et Hachette ; voyez le tome II de cette Correspondance, page 457, et les Annales de Chimie, tome XXXI ou XXXII, année 1799), mais en ayant soin de ne pas y faire entrer le diamant. Les résultats lui donnèrent toujours du bon acier pur, ce qui lui fit penser que nous n'avions pas encore des preuves satisfaisantes ou concluantes sur les changemens du fer en acier, par le moyen seul du diamant. M. Pepys pensa que s'il restait encore quelques doutes, la batterie voltaïque serait, à cet égard, un *experimentum crucis*, et son génie lui suggéra facilement une manière de l'établir qui fût à l'abri de toute objection. Il recourba un fil de fer pur et doux, en lui faisant faire un coude vers son milieu, et il le divisa longitudinalement dans cet endroit, au moyen d'une scie très-fine. Il mit dans l'ouverture de la poudre de diamant, ayant soin de l'y maintenir par deux fils plus minces, placés l'un au-dessus, l'autre au-dessous, et qu'il empêcha de se déranger au moyen d'un autre petit fil roulé solidement et exactement autour d'eux. Tous ces fils étaient d'un fer doux très-pur, et la partie qui contenait la poudre de diamant fut enveloppée avec des feuilles minces de talc. L'appareil ainsi préparé fut placé dans le circuit électrique, et ayant été bientôt chauffé à rouge, on le maintint dans cet état pendant six minutes. L'ignition avait si peu d'intensité, que la plupart des assistans n'attendaient aucun résultat décisif.

Cependant M. Pepys ayant ouvert le fil, trouva que le diamant avait disparu ; de nombreuses cavités s'étaient formées, pendant la fusion, dans l'intérieur du fer, et toute la partie qui avait été en contact avec le diamant était convertie en un acier vésiculaire et pur. Ce résultat est concluant, car on avait soigneusement évité tout contact de matière charbonneuse, à l'exception du diamant ; c'est donc à cette matière seule qu'on peut rapporter le changement survenu dans le fer.

Analyse des travaux de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut Royal de France, pendant l'année 1815; par M. DELAMBRE, *Secrétaire perpétuel.*

PARTIE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

M. Delambre donne l'analyse des Mémoires suivans :

1°. Sur le Flux et le Reflux de la mer. Sur l'Application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle ; par M. Laplace.

2°. Sur le Calcul intégral, cinquième partie ; par M. Legendre. (Voyez page 251 de ce volume.)

3°. Sur les Lois de la réfraction ordinaire et extraordinaire ; par M. Ampère. (Voyez page 238 de ce volume.)

4°. Sur deux Micromètres propres à mesurer les diamètres du soleil et de la lune ; par M. Rochon.

5°. Sur la Distribution de la chaleur dans les corps. Sur la Théorie des Ondes ; par M. Poisson. (Voyez page 243 de ce volume.)

6°. Découverte de deux sortes de double Réfraction, attractive et répulsive ; par M. Biot. (Voyez page 246 de ce volume.)

7°. Détermination des Lois suivant lesquelles la lumière se polarise à la surface des métaux. Phénomènes de polarisation successive observée dans des Fluides homogènes. Sur une nouvelle espèce d'Anneaux colorés qui s'obtiennent dans les plaques de spath d'Islande, taillées perpendiculairement à l'axe de cristallisation ; par M. Biot.

8°. Sur le mouvement des Fluides dans les tubes capillaires ; par M. Girard, inspecteur-général des Ponts et Chaussées. Ce Mémoire contient les tableaux de plus de douze cents expériences, d'où il résulte que dans les tubes capillaires, la température fait varier la vitesse d'écoulement ; cette vitesse croît avec la température.

9°. Sur l'Orbite de la planète Vesta, par M. Daussy.
(Durée de la révolution sidérale de cette planète, $1335^j,205$,
celle de la Terre étant........................ $365^j,256$).

10° Sur l'Orbite de la Comète de 1807; par quatre astronomes étrangers. Ils s'accordent sur la durée de sa révolution, et l'estiment de 72 à 74 années. (La période de la comète de 1759 étant de 75 à 76 ans; elle reparaîtra vers l'an 1835.)

11°. Sur la libration de la Lune; par MM. Bouvard et Nicollet.

12°. Mémoire (*) sur les Surfaces d'équilibre des fluides imparfaits, tels que graines, sables, etc.; par M. Allent.

L'intention de l'auteur n'a point été de donner de nouveaux développemens à la Théorie de la Poussée des terres, ni d'ajouter de nouveaux faits à ceux qui ont été recueillis sur cette question, dont la solution complète s'appliquerait si utilement à l'architecture civile, hydraulique et mécanique; mais il s'est proposé de faciliter le tracé géographique des surfaces de talus naturel et de talus d'éboulement entre des limites données, d'après la génération même de ces surfaces, déduite d'une seule expérience fondamentale. Cette génération est expliquée dans le Mémoire de M. Allent, sans le secours d'aucun calcul ni d'au-

(*) L'auteur de ce Mémoire, très-familier avec les méthodes de la Geométrie descriptive, a déduit d'une expérience fondamentale, la loi de génération des surfaces dites de *remblai* et *d'éboulement* assujéties à passer par des points ou des lignes données: ce Mémoire est divisé en trois chapitres, dans lesquels on traite, 1°. des talus naturel et d'éboulement, et des lois communes aux talus; 2°. de la surface élémentaire du talus naturel, et des surfaces formées par ses combinaisons; 3°. de la surface élémentaire et des surfaces composées du talus d'eboulement.

La science doit à M. Allent plusieurs Mémoires fort intéressans; celui-ci y est remarquable par une heureuse application de la Géométrie à une question qui d'abord semble appartenir spécialement à la Mécanique. On reconnaîtra dans le dernier article, la modestie du savant ingénieur.

« Ces considérations appartiennent à la mécanique des fluides imparfaits. Je n'ai voulu dans ce Mémoire, qu'exposer les lois principales de leurs surfaces sous les talus naturel et d'éboulement, et montrer l'identité de ces surfaces avec les enveloppes développables qui ont pour enveloppées des cônes droits circulaires dont l'axe est vertical. Je regretterais de n'etre pas en situation de continuer ces recherches, si je n'étais certain qu'il suffit d'appeler sur ce point l'attention des savans et des ingénieurs. Nous sommes loin des tems où les uns étaient exclusivement livrés à la théorie, et les autres à la pratique. L'ingénieur applique les principes des sciences aux travaux de l'art qu'il professe, et le géomètre ou le physicien trouve souvent, dans les méthodes des arts, les sujets de ses calculs ou de ses expériences. C'est un fruit de ces institutions, telles que l'Ecole Polytechnique et les Ecoles des services publics, où les savans, les ingénieurs les plus distingués se trouvent réunis, comme chefs, instituteurs ou collaborateurs. Moi-même je dois peut-être à la faible part que j'ai prise aux travaux des conseils ou des commissaires chargés d'arrêter les plans d'instruction de ces écoles, d'avoir pu donner plus de généralité à ces observations pratiques. Puissent-elles du moins servir à montrer l'utilité de ces établissemens, où par un échange et une chaîne de services, les sciences contribuent aux progrès des arts, et trouvent dans les progrès mêmes, des moyens de perfectionnement. A.

cune figure, avec une méthode et une clarté de style qui ne laissent rien à desirer.

13°. Démonstration du théorème de Fermat sur les nombres polygones ; par M. Cauchy. (Voyez page 295 de ce volume.)

14°. Sur les Puissances refractives et dispersives de certains liquides ; par MM. Arago et Petit.

Le résultat de ce Mémoire est que les vapeurs ont un pouvoir réfringent sensiblement moindre que celui des liquides qui les ont formées. (*Voyez un article relatif au pouvoir réfringent, tome I de la Correspondance*, page 366.) Le pouvoir réfringent du soufre carburé liquide, rapporté à l'air, étant 3, celui de la même substance à l'état de vapeurs, rapporté de même à l'air, ne surpasse pas 2. Les auteurs de ce Mémoire ont entrepris un travail pour déterminer les variations qu'éprouve le pouvoir réfringent d'un corps, soit par le changement de la densité du corps, ou par sa combinaison avec d'autres substances.

Un autre résultat non moins intéressant que le premier, c'est que le pouvoir dispersif diminue avec la densité, et dans un plus grand rapport que le pouvoir réfringent. Dans le soufre carburé à l'état liquide, le rapport des pouvoirs dispersif et réfringent est 0,14, et il se réduit à 0,08 dans l'état de vapeur.

15°. Recherches sur la Dilatation des solides, des liquides et des fluides élastiques ; par MM. Dulong et Petit.

Le résultat de ce Mémoire est, que dans les hautes températures, la dilatation des métaux suit une marche plus rapide que celle de l'air, de sorte, par exemple, que quand un thermomètre d'air marque 300° sur son échelle, un thermomètre à mercure en marque 310, et le thermomètre métallique 320.

16°. Rapport de MM. Charles, de Rossel et Arago, sur le Phare à réflecteur parabolique de M. Lenoir.

17°. Rapport sur les Serrures à combinaison, par M. Molard.

18°. Sur le tracé des routes ; par M. Dupin. Dans un premier Mémoire, l'auteur considère les routes comme destinées à joindre des points isolés en nombre infini, sur des surfaces d'une courbure arbitraire. Dans le second, il suppose qu'elles doivent servir au transport, par élémens infiniment petits de masses continues linéaires, superficielles ou solides. M. Monge avait résolu ce problème, en considérant les routes comme rectilignes. (Voy. le Mémoire des Déblais et Remblais, par M. Monge, Académie de Paris, volume de ses Mémoires, année 1781.) M. Dupin suppose que les routes sont assujéties à suivre les inflexions d'un terrain courbe quelconque.

19°. Exposition des Opérations exécutées dans les départemens du

Haut et Bas-Rhin, pour servir de fondement à la Carte de l'Helvétie, et à la mesure du parallèle de Strasbourg à Brest; par M. Henry, colonel au Corps Royal des Ingénieurs-Géographes.

20°. Nouvelle Machine à vapeur; par M. Gengembre, inspecteur général des Monnaies.

§ III.

ANNONCE D'OUVRAGES.

Traité élémentaire de Dynamique, ou Leçons de Mécanique analytique données à l'Ecole Polytechnique; par M. de Prony, *première et deuxième Parties*.

Supplément à l'Essai sur la Théorie des Nombres, seconde édition; par M. Legendre.

Ce Supplément est divisé en trois chapitres. *Premier chapitre*. Décomposition d'un nombre donné en quatre carrés, tels que la somme de leurs racines soit égale à un nombre donné compris entre certaines limites. *Second chapitre*. Démonstration du théorème de Fermat sur les nombres polygones, et de plusieurs théorèmes analogues. *Troisième chapitre*. Deux méthodes nouvelles pour la résolution des équations numériques.

Traité de Chimie élémentaire, théorique et pratique, tome quatrième et dernier. Un vol. in-8° de 333 pages. (Le nombre des planches de cet ouvrage est de 32).

Par M. Thenard, membre de l'Institut.

Recueil de Mémoires, Consultations et Rapports sur différens objets de Médecine légale. Un volume in-8°, 1816; par M. Chaussier (*).

(*) M. Chaussier, actuellement Médecin de l'Ecole Polytechnique, a été l'un des instituteurs fondateurs de cette Ecole. C'est involontairement qu'on a omis son nom sur la liste imprimée, pag. 333 et 334 du premier volume de la Correspondance. On y désigne M. Chaptal comme l'un des professeurs adjoints de Chimie. A la vérité, ce savant a fait la plus grande partie de l'un des Cours préliminaires qui ont précédé les Cours réguliers et annuels; mais ensuite il a été remplacé par M. Chaussier, qui fut à la fois professeur et médecin jusqu'en 1799, époque à laquelle on organisa les Ecoles de services publics, et où l'on réduisit le nombre des Professeurs de Chimie de l'Ecole Polytechnique. H. C.

Traité de Physique expérimentale et mathématique. 4 vol. in-8°, caractère serré; par M. Biot. (Il aura environ 20 planches, paraîtra dans le mois de mars, et se vendra chez M. Déterville, libraire, rue Haute-Feuille.)

Annales de Chimie et de Physique, rédigées par MM. Gay-Lussac et Arago; ouvrage périodique qui paraît tous les mois, par cahier de sept feuilles. (Prix de l'abonnement pour un an, 20 francs, à Paris.)

Mécanique analytique, par Lagrange, nouvelle édition augmentée par l'auteur. Deux vol. in-4°.

Mélanges d'Analyse algébrique et de Géométrie; par M. J. de Stainville, répétiteur adjoint à l'Ecole Polytechnique; 1 v. in-8°.

Ouvrages de M. Dupin, officier du Génie maritime : Tableau de l'Architecture navale militaire, aux dix-huitième et dix-neuvième siècles; première Partie, manuscrite. Analyse de cette première Partie, in-4° de 24 pages. Lyon, 1815.

Du Rétablissement de l'Académie de Marine. Paris, année 1815.

Annuaire présenté au Roi par le Bureau des Longitudes, pour l'an 1816. (Prix, 1 fr., chez Mme Courcier.)

Aux articles extraits du Système du Monde de M. de Laplace, qui rendent cet Annuaire si recommandable, M. Arago a ajouté, cette année, plusieurs Tables d'un grand intérêt pour les élèves de l'Ecole Polytechnique. Ces Tables font connaître, 1°. les vitesses du vent, dont la plus petite, à peine sensible, est de 1800 mètres par heure, et la plus grande (celle du vent qui renverse des édifices et déracine les arbres), de 162 mille mètres dans le même tems, ou 45 mètres par seconde; 2°. la marche de l'aiguille aimantée; 3°. les pesanteurs spécifiques des fluides élastiques, observées et calculées par la méthode que nous avons appliquée au cyanogène de M. Gay-Lussac (pag. 402 et 403 de ce cahier).

Règles à calculer, assujéties aux mesures françaises, exécutées par M. Lenoir, sous la direction de M. Jomard, ancien élève, commissaire du Gouvernement près la Commission d'Egypte. (Se vendent au Dépôt de la Marine, rue Louis-le-Grand, et on trouve chez le même artiste des baromètres portatifs, de l'invention de M. Gay-Lussac, prix 100 fr.)

INSTITUT ROYAL DE FRANCE.

Prix et sujets de Concours, année 1815.

PREMIÈRE CLASSE. — *Prix décernés.* — Mémoire sur les lames élastiques ; auteur, Mlle Sophie Germain, de Paris.

Mémoire sur la Théorie des Ondes ; auteur, Augustin-Louis Cauchy.

Prix de Physique, partagé entre MM. Seebeck et Brewster.

M. Seebeck a découvert que toutes les masses de verre, chauffées et ensuite refroidies rapidement, produisent des figures régulières diversement colorées, lorsqu'elles sont interposées entre des piles de glace, ou des miroirs réflecteurs combinés suivant la méthode de Malus. Il a vu en outre que les figures qui se produisent dans un même morceau, devenaient différentes, quand on en changeait la forme. M. Seebeck a obtenu les mêmes phénomènes, en comprimant fortement le verre dans un étau. Aussitôt qu'on retire le verre de l'étau, il reprend sa forme primitive et ne donne plus de couleurs.

Sujet de Concours pour le Prix de Mathématiques à décerner en 1818.

Démontrer ce théorème de Fermat : *Passé le second degré, il n'existe aucune puissance qui puisse se partager en deux puissances du même degré.*

QUATRIÈME CLASSE. — *Beaux-Arts.* — Grands prix d'Architecture ; *Projet d'Ecole Polytechnique ;* auteurs, MM. de Dreux et Vincent.

§. IV. PERSONNEL.

M. Berge, maréchal-de-Camp d'Artillerie, a été nommé commandant de l'Ecole spéciale de l'Artillerie et du Génie, par ordonnance du Roi du 7 février 1816.

M. Cauchy (Augustin-Louis), a été chargé de faire pendant l'année scolaire 1815 — 1816, le cours d'analyse de la première division, à la place de M. Poinsot, à qui sa santé n'a pas permis de faire ce cours.

Conformément à l'ordonnance (*) du 6 juin 1814, un Concours pour deux places d'Elèves ingénieurs-hydrographes, a été ouvert le 1er mars 1816. En l'absence des deux examinateurs de la Marine, MM. Monge (Louis) et Lancelin, M. Poisson a été chargé de l'examen.

MM. *Paul* Monnier et *Etienne-Germain* Capella, élèves de l'Ecole Polytechnique, ont été nommés à ces deux places comme ayant le mieux satisfait à l'examen.

CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

Année scólaire 1815—1816.

Le Conseil de Perfectionnement a revu dans cette session (la 15e) les programmes d'enseignement de l'Ecole. Le programme de Physique seul, a subi une nouvelle rédaction; il a été adopté tel qu'il a été proposé par le Conseil d'Instruction.

L'ensemble de ces programmes forme une brochure in-4° de 64 pages. On y a joint, suivant l'usage, trois tableaux qui montrent la distribution des Cours et du tems des études pendant l'année scholaire 1815 — 1816.

(*) *Extrait de l'Ordonnance du Roi, concernant l'organisation du dépôt de la Marine*, 6 *Juin* 1814.

Art. 3 et 4. Le nombre d'élèves ingénieurs-hydrographes ne pourra dépasser celui de quatre ; ils seront assimilés aux élèves du génie maritime.

Art. 10. Les sujets qui se présenteront pour être élèves hydrographes, devront écrire correctement la langue française, et posséder une autre langue ; ils devront en outre savoir l'Arithmétique, la Géometrie, les deux Trigonométries, les Elémens d'Astronomie pratique et les principes du dessin. Ils ne pourront être reçus élèves avant d'avoir été examinés, d'après un ordre du Ministre, par un des examinateurs de la Marine, en présence du directeur général et de son adjoint, des deux ingénieurs-hydrographes en chef. Il sera dressé procès-verbal de cet examen.

ADMISSION A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

Discours prononcés à l'ouverture des examens de l'Ecole Polytechnique, en 1814 et en 1815, par M. le Comte de CHABROL, *Préfet de la Seine.*

Paris, 3 août 1814.

« Messieurs,

» La circonstance qui rassemble ici la majeure partie des candidats à l'Ecole Polytechnique, réveille chaque année chez moi le même intérêt et les mêmes souvenirs.

» C'est à vous, messieurs, à maintenir, par vos études, une Ecole célèbre, estimée chez tous les peuples de l'Europe autant qu'elle l'est en France. Plusieurs d'entre vous contribueront sans doute à l'illustration de cet établissement destiné à traverser toutes les époques de nos révolutions sans en éprouver aucune atteinte.

» Tel est le sort des institutions liberales et utiles, on y revient toujours avec empressement, et elles s'adaptent d'elles-mêmes à toutes les circonstances politiques; celle-ci, dès son principe, eut pour but de former des sujets que l'on pût employer avec confiance dans toutes les carrières. Elle est propre à faire germer et à développer de grandes vues, à élever les pensées et à faire entrevoir le grand ensemble qui lie entr'eux tous les arts qui concourent à la splendeur des Etats, et à établir entre tous les services cette harmonie et cet accord qui contribuent au succès des grandes entreprises.

» L'examinateur distingué (M. Labey), qui doit juger de vos talens, nous est cher à plus d'un titre. Sa longue expérience vous garantit, messieurs, que rien de ce qui peut déterminer son suffrage en votre faveur n'échappera à sa sagacité. Sa douceur vous permet d'user de tous vos moyens : elle doit borner cette timidité qui pourrait en restreindre le développement. Si tous les candidats ne peuvent être admis, un retard ne fera que les fortifier dans des études utiles.

» Félicitez-vous, messieurs, d'être arrivés au degré d'instruction nécessaire pour soutenir l'examen de l'Ecole Polytechnique. Ce que vous avez acquis de connaissances pour y parvenir indique déjà que vous avez employé utilement le tems de votre jeune âge.

» Vous n'êtes pas étrangers à la littérature, et les sciences exactes ne doivent pas vous la faire négliger; elles doivent ser-

vir, au contraire, à vous mettre à même d'y porter une logique plus forte, des vérités plus exactes et mieux démontrées.

» L'éloquence n'est puissante que par la force des raisonnemens, par l'ordre des idées et l'enchaînement des conséquences. Loin de nous l'idée de ceux qui croient que l'étude des sciences étouffe dans leur naissance l'élan des sentimens du cœur et les fleurs de la littérature : plusieurs génies ont prouvé qu'elles pouvaient se concilier; et si ces exemples sont rares, c'est qu'il est donné à peu d'hommes d'exceller à la fois dans plusieurs genres différens.

» Les carrières qui vont s'ouvrir devant vous seront désormais plus variées, et n'en seront pas moins importantes. Jusqu'ici la guerre réclamait le plus grand nombre des élèves de l'Ecole Polytechnique; plusieurs ont été moissonnés de bonne heure: une foule de jeunes talens ont disparu avant d'avoir acquitté toute leur dette à l'Etat; mais du moins ont-ils tous laissé les exemples les plus nobles de leur dévouement à la Patrie.

» Des faits biens récens encore, applaudis par tous les militaires, admirés par un ennemi généreux, ont montré sous les murs de Paris, ce qu'on pouvait attendre d'élan, de sang-froid et de bravoure d'une jeunesse élevée dans la contemplation continuelle du service de l'Etat; aujourd'hui, messieurs, la paix est donnée au monde, une famille auguste et révérée vient faire cesser une lutte qui a ensanglanté l'Europe et qui la menaçait d'une décadence rapide, suite nécessaire de la dépopulation causée par tant de batailles meurtrières.

» Le commerce, les arts, les manufactures, la navigation réclameront particulièrement votre application et vos services. Vous vous y livrerez avec d'autant plus de joie que vous sentirez tout l'avantage de contribuer au bonheur des peuples, objet constant de la méditation d'un souverain dont tous les desirs tendent à fermer les plaies de l'Etat. Contribuez, messieurs, de tout votre pouvoir, dans les carrières que vous devez parcourir, à le faire bénir par ses peuples; c'est le sentiment qu'il réclame d'eux, et il doit principalement l'obtenir, à l'aide de ceux qui sont destinés à suivre l'exécution des sages projets de son administration paternelle. »

Paris, 1er septembre 1815.

« Messieurs,

» Vous allez entrer dans la lice qui vous est ouverte pour être admis à servir un jour votre pays par vos lumières et par votre courage. Cette noble destination vous impose des devoirs, comme elle vous promet de l'honneur. Plus les hommes

sont éclairés, plus ils doivent connaître et pratiquer les principes d'ordre et de soumission à l'autorité. Si l'ignorance est une excuse pour la multitude aveugle qui marche sous la bannière des factions, il n'en est pas ainsi de l'homme instruit qui leur prête son appui. Il doit savoir que la prospérité publique et le bonheur privé dépendent de la stabilité du pouvoir suprême, et qu'il n'est rien de stable sans un dévouement sincère, sans une fidélité inviolable envers le prince légitime, revêtu de l'autorité et chargé du maintien des lois.

» Jeunes gens, espoir du Monarque et de la Patrie, croyez aux conseils de celui qui vous a devancés dans la carrière que vous allez parcourir, et qui ne peut se rappeler cette époque sans la plus vive émotion. Au milieu des vicissitudes que j'ai pu éprouver, je n'ai jamais perdu le souvenir de ces heureux instans de la première jeunesse, où des principes, des goûts, des études semblables forment des liens indissolubles pour le reste de la vie, et fondent l'amitié sur l'estime.

» C'est à ce titre, autant qu'à celui de magistrat, que j'ai droit de m'adresser à votre cœur, et j'ai l'orgueil de penser que ma voix ne sera pas comme un vain bruit qui résonne et se perd sans laisser de traces après lui.

» La Patrie et le Roi, le Roi et la Patrie! Ces noms sont inséparables; telle est la maxime qu'un illustre prince proférait dernièrement au milieu de l'élite de nos concitoyens. Placé le plus près du trône, il considérait comme la première gloire celle d'être le premier et le plus fidèle sujet du Roi.

» Puissent ces paroles mémorables, qui firent une si forte impression sur nous, produire le même effet sur vos esprits! Qu'elles vous servent constamment d'exemple et de leçon; qu'elles soient toujours la règle de votre conduite.

» Si vous abandonniez jamais ces principes pour suivre les écarts des factions, en vain vous feriez des progrès dans les arts et dans les sciences, vos succès même et vos talens seraient un malheur pour l'Etat. Ils ne peuvent avoir de prix qu'autant qu'ils serviront à consolider le trône et à l'environner du respect et de la vénération des peuples.

» Votre carrière, messieurs, peut être plus ou moins brillante, elle ne sera jamais véritablement honorée et embellie par la considération publique, sans la pratique des devoirs de sujet dans toute leur étendue, et le sentiment d'un ardent amour pour la Patrie et le Souverain.

» Ces vertus furent de tout tems familières aux Français; elles doivent l'être plus que jamais, sous un Prince que l'Europe place avec justice au rang des Monarques les plus renommés, par ses lumières et par ses vertus. »

CONCOURS DE 1815.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Analyse; Mécanique........	MM. Legendre, Poisson. *suppléant*, M. Ampère.
Géométrie descriptive; Analyse appliquée à la Géométrie;	M. Binet (J. P. M.)
Physique et Chimie..........	M. Dulong.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Paris..........................	M. REYNAUD.
Tournée du Sud..............	M. DINET.
Tournée du Nord..............	M. LABEY.

Les examens ont été ouverts le 1er septembre, et les cours pour la seconde division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 13 novembre.

Le Jury d'admisssion a prononcé le 17 octobre 1815, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

147 candidats ont été examinés;

SAVOIR :	A Paris........................	66	147
	Dans les départemens..........	81	

Sur ce nombre 118 ont été déclarés admissibles,

SAVOIR :	De l'examen de Paris............	54	118.
	Des départemens.................	64	

Le nombre des candidats admis à l'Ecole, par suite de la décision du Jury, a été de 94.

SAVOIR :	De Paris........................	47	94.
	Des départemens.................	47	

Nombre des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement, 3189.

SAVOIR :	De Paris.....................	1519	3189.
	Des départemens..............	1670	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole, 7376,

SAVOIR :	De Paris.....................	3289	7376.
	Des départemens..............	4087	

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des Elèves admis à l'Ecole Royale Polytechnique, par suite de la décision du Jury, du 17 octobre 1815.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Allard.	Isidore.	Parthenay.	Deux-Sèvres.
Allard.	Nelzir.	Parthenay.	Deux-Sèvres.
Ballery.	Sébastien.	Paris.	Seine.
Bazin.	Théodore-François.	Rennes.	Ille-et Vilaine.
Bellot.	Jean-Marie-Nicolas.	Fontainebleau.	Seine-et-Marne.
Bernard.	Jean-François.	Besançon.	Doubs.
Bienaymé.	Irénée-Jules.	Paris.	Seine.
Billoin.	Jean-Pierre-Antoine.	Cahors.	Lot.
Bizouard-Montille	Antide.	L'Isle de France.	
Bonfils.	Alexis-François.	Besançon.	Doubs.
Bouvet.	Charles-Adolphe.	Saint-Remy.	Marne.
Bruzard.	Augustin-Felix.	Semur.	Côte-d'Or.
Bussy (Belly de)	Michel-Jean-Baptiste.	Beaurieux.	Aisne.
Caffort.	Gabriel-Zacharie.	Raissac.	Aude.
Camus.	Charles-Louis-Constant.	Sailly-Zèle.	Somme.
Carbonnier.	Aimé-Théodore-Julien.	Paris.	Seine.
Caron.	Louis-Felix-Joseph.	Saint-Omer.	Pas-de Calais.
Castelnau (Boileau de).	Camille-Simon-Louis.	Nismes.	Gard.
Chambert.	Joseph.	Montech.	Tarn-et-Garon.
Charvet.	Hippolyte-Lucien.	Grenoble.	Isère.
Choiset.	Prosper.	Soissons.	Aisne.
Christofle.	Jean-Jacques.	Bessan.	Hérault
Clerget.	Charles.	Langres.	Haute-Marne.
Collardeau Duheaume.	Charles-Felix.	Paris.	Seine.
Collignon.	Barthélemy.	Metz.	Moselle.
Conil.	Jacques.	Narbonne.	Aude.
Conrot.	Pierre-Felix.	Sedan.	Ardennes.
Costel.	Jean-Paul-Victor.	Paris.	Seine.
Daman.	Aug.-Victor-Antoine.	Saint-Omer.	Pas-de-Calais.
Delaville le Roulx.	Joseph.	Paris.	Seine.
Desforges (Boucher).	Ant.-Joseph-Charles.	L'Isle Bourbon.	

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DEPARTEMENS.
Desmarest.	Marie-Joseph-Eugène.	Soissons.	Aisne.
D'Houdetot.	Stanislas-Adèle.	Charleville.	Ardennes.
Dubard.	François-Pierre.	Montigny - sur-Vingeanne.	Côte-d'Or.
Duffourc.	Philippe.	Astaffort.	Lot et Garonne.
Dumoulin.	Joseph-Henri.	Grenoble.	Isère.
Durouret (Geoffroy).	Francois-Felix.	Grasse.	Var.
Etesse.	Paul-Joachim-Elisabeth	Bordeaux.	Gironde.
Fabry.	Auguste.	Bourg St.-Andéol	Ardèche.
Finck.	Pierre-Joseph-Etienne.	Lauterbourg.	Bas-Rhin.
Fourier.	Adolphe.	Angers.	Maine-et-Loire.
Frézouls.	Antoine-Casimir.	Vielmur.	Tarn.
Frotois.	Jean-Joseph.	Espalion.	Aveiron.
Gail.	Jacques-Desiré.	Paris.	Seine.
Gandillot.	Jean-Denis.	Mondon.	Doubs.
Goll.	Henri-Edouard.	Andolsheim.	Haut-Rhin.
Gougeon.	Paul-Nicolas.	Metz.	Moselle.
Grimard Durepaire.	Elie.	Brantôme.	Dordogne.
Grosier St.-Elme.	Augustin.	Orléans.	Loiret.
Hamart.	Paul.	Châteauroux.	Indre.
Harmois.	Louis-Francois-Joseph.	Namur.	
Herson.	Placide-Alexandre.	Paris.	Seine.
Jouffroy.	Louis.	Brest.	Finistère.
Labaume (Chabrier).	Jean-Baptiste-François Alexandre.	Mons.	Var.
Labesse (Métivier de).	Gilbert.	Bastia.	Corse.
Lacroix.	Charles-Casimir-Sevère.	Malaga en Espag.	
Landraud.	Pierre.	Garat.	Charente.
Lavédrine (Demalet).	Pierre-Louis-Felix.	Riom.	Puy-de-Dôme.
Lecoutour.	Louis-Franc.-Guillaume	Paris.	Seine.
Lemaistre.	Charles-Aimé.	Montoire.	Loir-et-Cher.
Lepreux.	Felix-Louis.	Paris.	Seine.
Lestelle.	Thomas.	Blois.	Loir-et-Cher.
Malcotte.	Benjamin-Joseph.	Fumay.	Ardennes.
Manès.	Guillaume.	Saujon.	Charente-Infér.
Marozeau.	Pierre-Georges.	Gouvieux.	Oise.
Marraud.	Francois.	Monclar.	Lot-et-Garonne.
Marthe.	Adolphe.	Epernay.	Marne.
Mascrey.	Joseph-Adr.-Emmanuel	Paris.	Seine.
Masquelier.	Vincent.	Lille.	Nord.
Maugars.	Eugène.	Nantes.	Loire-Inférieure
Michaud.	Jean-Charles-Paul.	Dôle.	Jura.
Oudan.	Louis-Marie.	Reims.	Marne.
Pariset.	Nicolas-Franc.-Joseph.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Payen.	Emile-Auguste.	Liège.	
Pinet dit d'Anglemont.	Pierre-Isid.-Constantin.	Valence.	Drôme.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Pironneau.	Louis Agis.	Nontron.	Dordogne.
Poiseuille.	Jean-Léonard-Marie.	Paris.	Seine.
Pontagnier.	Hippolyte-Gabriel.	Aigueperse.	Puy-de-Dôme.
Poussielgue.	Albin.	Paris.	Seine.
Rallier.	Toussaint-Louis-Jean-Joseph.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Redon.	Jean-Etienne.	Briancon.	Hautes-Alpes.
Renaut.	Victor-Antoine.	Lunéville.	Meurthe.
Réocreux.	Joseph.	Saint-Etienne	Loire.
Riffault.	Anatole.	Monts.	Indre et Loire.
Rouget.	Jean-Joseph.	Aix.	Bouches-du-Rh.
Savary.	Felix.	Paris.	Seine.
Sebe.	Francois-Frédéric.	Grenoble.	Isère.
Segretain.	Pierre-Théophile.	Niort.	Deux-Sèvres.
Thilorier.	Charles-Saint-Ange.	Forges.	Charente-Inf.
Thirria.	Charles-Edouard.	Beauvais.	Oise.
Tournyer.	Nicolas.	Amboise.	Indre-et-Loire.
Tronc.	Fulcran-Antoine.	Lodève.	Hérault.
Tugny (Gondallier).	Michel-Antoine-Desiré.	Bouffignereux.	Aisne.
Valat.	Jacques-Pierre-Fanny.	Montpellier.	Hérault.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Liste, *par ordre de mérite, des Elèves admis dans les services publics, pendant l'année* 1815.

ARTILLERIE DE TERRE.

MM.
Pommé.
Gaillardon.
Lechevalier.
Chaper.
Pirain.
Favre Bulle.
Pierrugues.
Ferrière.
Batbedat.
Jousserant.
Bobillier.
Olivier.

MM.
Mutel.
Puillon Boblaye.
Moultson
Pernet.
Leblanc.
Prat.
Guyonneau Pambour.
Castillon.
Loizillon.
Caron (Pierre).
Hélie.
Piobert.

MM.	MM.
Rogier.	Moreau (Emile).
Le Paige Dorsenne.	Garçon Rivière.
Giraud.	Bardin.
Juge.	Mie.
Camus.	Chambige.
Dufraisse.	Percy.
Paris.	Payan.
Cathol Dudeffan.	Gineste.
Pargade.	

GÉNIE MILITAIRE.

MM.	MM.
Chardonneau.	Baillot.
André.	Garnot.
Mengin.	Crozals.
Villeneuve.	Morlet.
Durivau.	Dubain.
Roubaud.	Maitrot.
Sergent.	Lenglet.
Germain.	Demallet Lavédrine.
Lemarchand.	

ETAT de situation des Elèves de l'Ecole Royale Polytechnique, à l'époque du 1er Janvier 1816.

L'Ecole était composée, au 1er Janvier 1815, de... 251 Elèves.
Elle a perdu pendant l'année 1815,

SAVOIR :

Admis dans les services publics.	Artillerie de terre....	41	58	124
	Génie militaire......	17		
Démissionnaires ou sortis sans être placés....			66	
Reste....................				127
Elèves admis à dater du 1er novembre 1815..........				94
TOTAL des Elèves composant l'Ecole au 1er Janv. 1816.				221

SAVOIR :

Première division....................	108	221
Deuxième division....................	113	

AUTEURS
DES ARTICLES SCIENTIFIQUES,

Insérés dans les trois premiers volumes de la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, depuis avril 1804 jusqu'en janvier 1816.

***LISTES** des Elèves admis à l'Ecole Polytechnique, depuis l'année de sa création, janvier 1795, jusqu'au premier janvier 1816.*

NOMS DES ÉLÈVES

Nombre total des Elèves admis à l'Ecole Polytechnique, jusques et compris le 1er janvier 1816. 3189

HISTOIRE DE L'ALGEBRE DES INDIENS (Page 260-283)

Page 273 et Suivantes .... Majool .... مجهول;

Aswad .... اسود; Neelok .... نيلك;

Page 273, Ligne 19 .... Signe Positif .... دهن;
Signe Negatif .... ويي;

Idem ...... *Ligne 21* .... Inconnue d'une Equation .. ني;

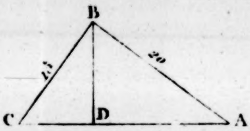
Idem ...... *Ligne 30* .... Signe du Carré .... بال.

Idem ...... *Ligne 31* .... Signe du Cube .... كعب;

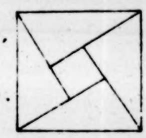
Page 274 Ligne 22 .... Inconnues .. पा, का, नी, पी, लो.

Page 275 Ligne 12 .... Nombre .... 153, ١٥٣.

Page 277
Fig. 1re



Même Page 277,
Figure 2me
dite la Fiancée.



Chiffres (Page 281, Ligne 1re)

Sanscrits	९ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०
Arabes ou Persans	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
Idem	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Dans Planude (*Auteur qui florissoit en 1327.*)	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Tables Manuscrites de Sacrobosco (*Auteur Anglais Mort en 1256.*)	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Européens	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Exemple d'une Multiplication (Page 281, Ligne 24.)

١٢	12
١٣٥	135
١٢	12
٣٦	36
٦٠	60
١٦٢٠	1626

c
d
20 Corres

R

Gir

Memoire de M.r Chasles, Pages 302 - 342.

Fig. 1.re Page 338.

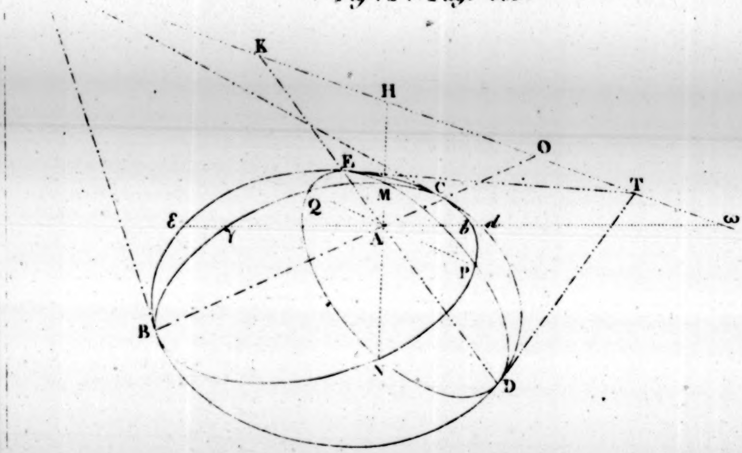
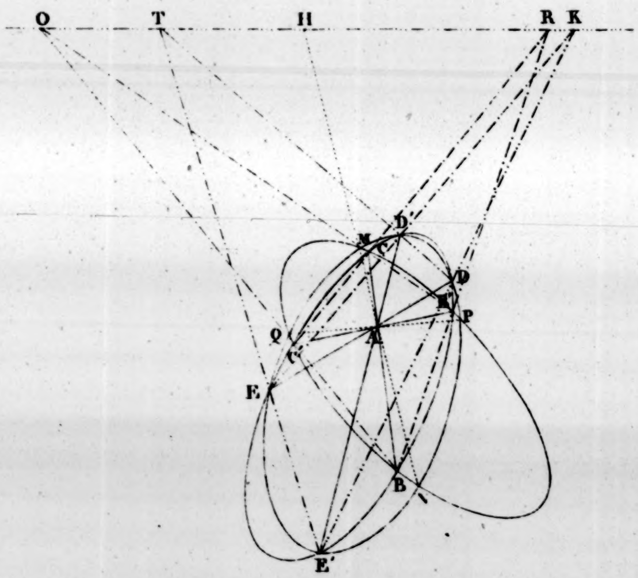


Fig. 2. Page 339.



Girard dir. *L. Stevigny sculp.*

SUITE

DE LA TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME III.

Table du IIIe Cahier.

Janvier 1816.

§ Ier. Analyse. — Géométrie.

§ II. Sciences physiques.

§ III.

§ IV.

Errata. ——— *Avis au relieur sur le placement des planches.*

ERRATA

Du troisième Cahier du troisième Volume.

La première feuille de ce cahier étant la dix-huitième du volume, doit être numérotée de 259 à 274 ; c'est par erreur que les pages sont cotées de 1 à 16. (On rappelle ici une autre erreur de numéro à la page 187 du second volume ; cette page devait être marquée 137.)

3me vol., page 277, ligne 12, abaissée sur, *lisez* abaissée sur *AC*.

Avis au Relieur.

Les Tables des Matières des trois cahiers qui composent le troisième volume, doivent être réunies et placées après la page 422 de ce volume.

Second Avis au Relieur.

Placement des Planches des trois premiers volumes de la Correspondance.

Premier volume. (476 pages in-8°, et 13 planches.)

Ce volume contient 10 cahiers et 13 planches de format in-8°, marquées des lettres C *d*, suivies des chiffres depuis 1 jusqu'à 13 inclusivement; ensorte que la première est marquée (C *d* 1) et la dernière (C *d* 13).

Second volume. (469 pages in-8°, et 19 planches, dont 6 in-folio.)

Ce volume contient 5 cahiers, 13 planches in-8° et 4 in-folio, toutes marquées des lettres C *d*, suivies des chiffres depuis 14 jusqu'à 30 inclusivement. Entre la planche 5 du troisième cahier, marquée C *d* 23, et la planche B in-folio du quatrième cahier, marquée C *d* 24, il y a une autre planche A in-folio marquée (A, 8 (1)). Entre la planche 3 du cinquième cahier, marquée (C *d* 29), et la planche 5 (C *d* 30) du même cahier, il y a deux planches in-folio, l'une qui ne diffère pas de la planche C *d* 15, et l'autre marquée (A, *f*, 1).

Troisième volume. (422 pages, et 10 planches).

Ce volume contient 3 cahiers et 10 planches in-8° marquées des lettres C *d*, suivies des chiffres depuis 31 jusqu'à 40 inclusivement. La sixième du premier cahier, cotée C *d* 36, est une carte du cours de la Marne près Paris.

Le nombre total des planches des trois premiers volumes de la Correspondance est de 42, dont six sont in-folio,